Linguagens Formais e Autômatos

Variações de Máquinas de Turing

Andrei Rimsa Álvares
andrei@cefetmg.br

Sumário

- Variações de Máquinas de Turing
  - Máquina com cabeçote imóvel
  - Máquina com múltiplas trilhas
  - Máquina com fita ilimitada em ambas as direções
  - Máquina com múltiplas fitas
  - Máquinas não determinísticas

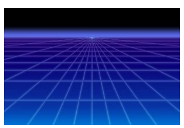
VARIAÇÕES DE MÁQUINAS DE TURING

Variações de MTs

- Algumas variações de Máquinas de Turing com um “incremento” à MT padrão (sempre com reconhecimento por estado final e por parada)

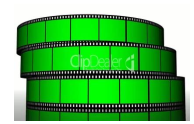
com cabeçote imóvel

com múltiplas trilhas



com fita ilimitada em ambas as direções

com múltiplas fitas



não determinísticas

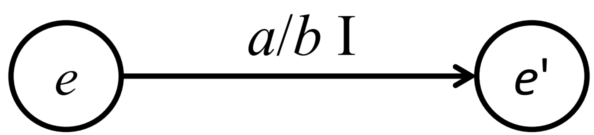
Podem existir outras variações?

- Essas variações **não aumentam o poder de reconhecimento** das máquinas, mas podem ser mais cômodas em determinados contextos
  – Mesmo se combinadas ou se forem usados outros critérios de reconhecimento (por estado final ou por parada)

MT com Cabeçote Imóvel

- Permite que o cabeçote fique imóvel em uma transição, onde a máquina é uma óctupla $M = (E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i, F)$, sendo que
  - δ é uma função de $E \times \Gamma$ para $E \times \Gamma \times \{\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{I}\}$
  - todas as outras são como em uma MT padrão

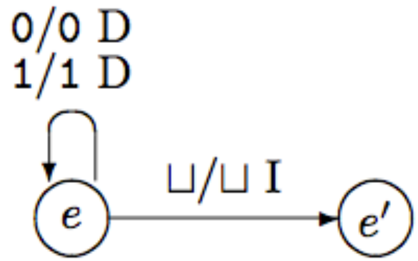
- A única diferença é que pode haver transição do tipo $\delta(e, a) = [e', b, \mathrm{I}]$, onde I indica que o cabeçote deve ficar imóvel



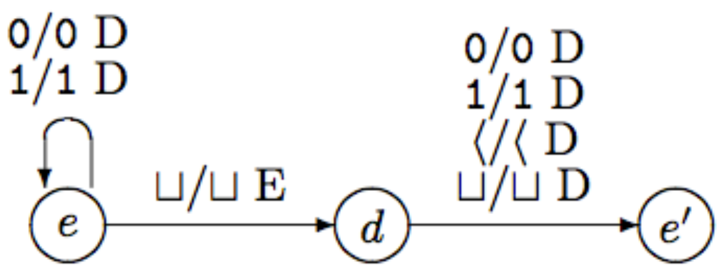
  - essa transição pode ser simulada, sendo d um novo estado
    - $\delta(e, a) = [d, b, \mathrm{D}]$
    - $\delta(d, c) = [e', c, \mathrm{E}]$ para cada $c \in \Gamma - \{<\}$

MT com Cabeçote Imóvel

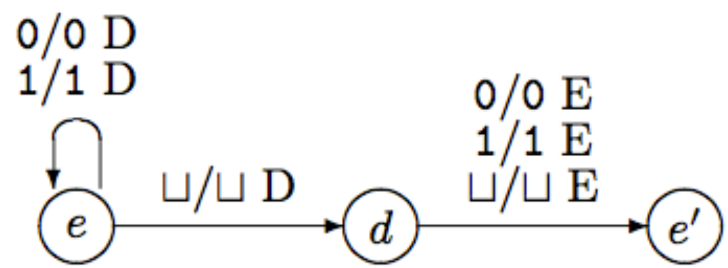
- Exemplo usando duas técnicas para simular o cabeçote imóvel



Trecho de MT com imobilidade



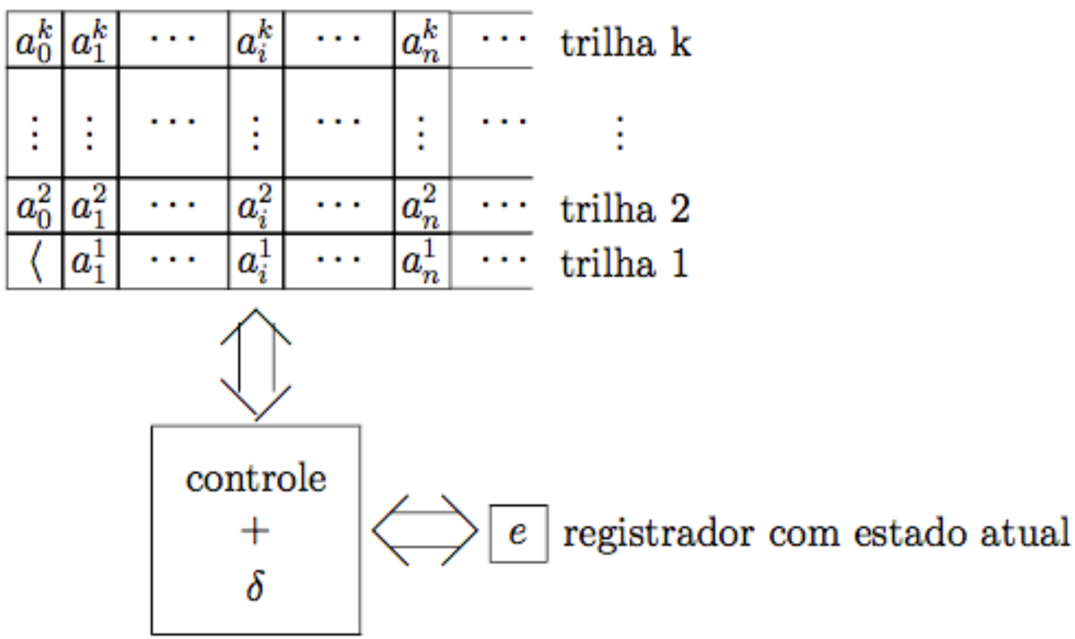
Simulação com
movimentação à esquerda



Simulação com
movimentação à direita

MT com Múltiplas Trilhas

- A fita é composta de múltiplas trilhas, isto é, cada célula da fita, ao invés de receber um símbolo, recebe uma k-tupla de símbolos
  - Assume-se que no início a trilha 1 contém $\langle$ na primeira posição, a palavra de entrada está na trilha 1 a partir da segunda posição, e o restante da trilha 1 e todas as outras trilhas contêm $\sqcup$



MT com Múltiplas Trilhas

- MT com k trilhas é uma óctupla $M = (E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i, F)$, sendo que
  - δ é uma função de $E \times \Gamma^k$ para $\mathrm{E} \times \Gamma^k \times \{\mathrm{D}, \mathrm{E}\}$
  - todas as outras são como em uma MT padrão

- Uma transição tem a forma $\delta(e, a_1, a_2, ..., a_k) = [e', b_1, b_2, ..., b_k, d]$, indicando que cada a_i deve ser substituído por b_i, para $i = 1, 2, ..., k$

$$e \xrightarrow{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k / b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_k\ \mathrm{d}} e'$$

  - note que, se $a_1 = \langle$, $d \neq \mathrm{E}$
  - apesar do símbolo $\langle$ não poder ser manipulado nas posições restantes na primeira trilha, ele pode ser manipulado sem restrições nas outras trilhas

MT com Múltiplas Trilhas

- Uma configuração instantânea de uma MT com k trilhas tem a forma

$$[e, x_1\underline{a_1}y_1, x_2\underline{a_2}y_2, \ldots, x_k\underline{a_k}y_k]$$

  - onde $|x_i| = |x_j|$ para $i \neq j$

O conteúdo da trilha i é $x_i a_i y_i$

- A linguagem aceita por uma MT de k trilhas, $M = (E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i, F)$, é o conjunto de toda palavra $w \in \Sigma^*$ tal que

$$[i, \langle\underline{w}, \sqcup\underline{\sqcup}, \ldots, \sqcup\underline{\sqcup}] \overset{*}{\vdash} [e, x_1\underline{a_1}y_1, x_2\underline{a_2}y_2, \ldots, x_k\underline{a_k}y_k]$$

  - onde $e \in F$ e $\delta(e, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ é indefinido

MT com Múltiplas Trilhas

- MT padrão → MT com k trilhas
  - Uma MT padrão $(E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i, F)$ pode ser simulada por uma MT com k trilhas $(E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta', i, F)$, onde
    - se $\delta(e, a) = [e', b, d]$, tem-se que $\delta'(e, a, \sqcup, ..., \sqcup) = [\mathrm{e}', \mathrm{b}, \sqcup, ..., \sqcup, \mathrm{d}]$

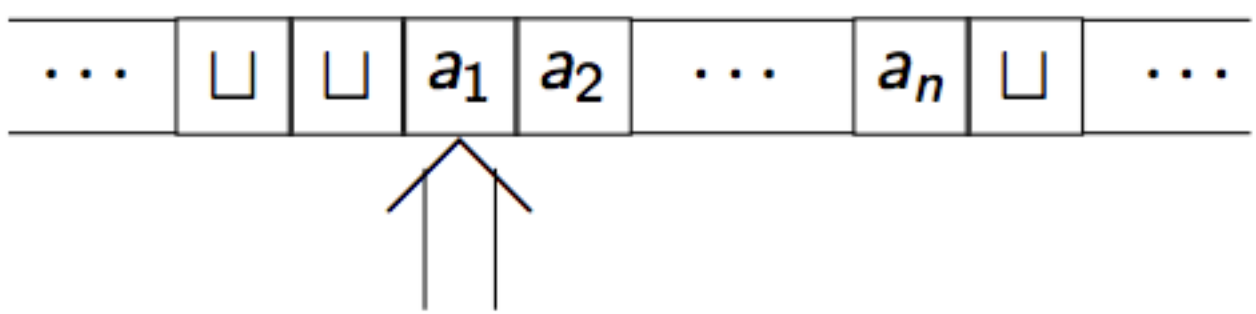
MT com Múltiplas Trilhas

- MT com k trilhas → MT padrão
  - Dada uma MT $M = (E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i, F)$ com k trilhas, obtém-se uma MT padrão equivalente à $M' = (E, \Sigma \times \{\sqcup\}^{k-1}, \Gamma \times (\Gamma - \{\langle\})^{k-1}, \{\langle\} \text{ x } \{\sqcup\}^{k-1}, \{\sqcup\}^{k}, \delta', i, F)$, de tal forma que
    - se $\delta(e, a_1, a_2, ..., a_k) = [e', b_1, b_2, ..., b_k, d]$, então M' tem a transição $\delta'(e, [a_1, a_2, ..., a_k]) = [e', [b_1, b_2, ..., b_k], d]$

O alfabeto da fita, ao invés de ser um conjunto Γ de símbolos "indivisíveis", é o produto cartesiano Γ^k

MT com Fita Ilimitada Em Ambas as Direções

- Uma MT com fita ilimitada em ambas as direções difere de uma MT padrão apenas no fato de que a fita não é limitada à esquerda
  - No início o cabeçote de leitura/escrita está posicionado no primeiro símbolo da palavra de entrada, se esta não for λ
  - Como a fita é ilimitada à esquerda, não há necessidade do símbolo $\langle$

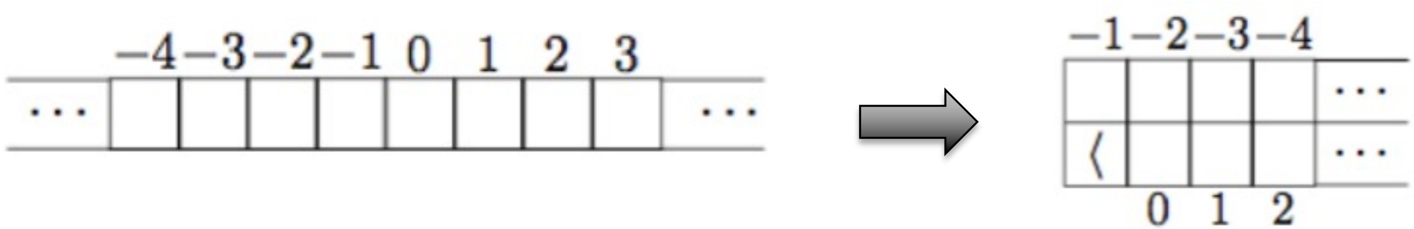


MT com Fita Ilimitada Em Ambas as Direções

- MT padrão → MT com fita ilimitada em ambas as direções
  - Seja $M = (E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i, F)$ uma MT padrão e sejam $i', j \notin E$; Uma MT com fita ilimitada em ambas as direções, equivalente à M, seria $M' = (E \cup \{i', j\}, \Sigma, \Gamma, \sqcup, \delta', i', F)$, onde
    - δ' inclui todas as transições de M
    - $\delta'(i', a) = [j, a, \mathrm{E}]$ para cada $a \in \Gamma$
    - $\delta'(j, \sqcup) = [i, \langle, \mathrm{D}]$

MT com Fita Ilimitada Em Ambas as Direções

- MT com fita ilimitada em ambas as direções → MT com 2 trilhas
  - **Primeira trilha:** além do símbolo $\langle \in \Gamma$, o conteúdo da fita bidirecional que começa na posição inicial do cabeçote e se estende para a direita
  - **Segunda trilha:** o conteúdo da fita bidirecional que começa na posição anterior à posição inicial do cabeçote e se estende para a esquerda



MT com Fita Ilimitada Em Ambas as Direções

- MT com fita ilimitada em ambas as direções → MT com 2 trilhas
  - Seja $M = (E, \Sigma, \Gamma, \sqcup, \delta, i, F)$ uma máquina com fita ilimitada em ambas as direções, pode-se obter uma máquina de duas trilhas, $M' = (E', \Sigma, \Gamma', \langle, \sqcup, \delta', i', F')$, que simula M, onde
    - $E' = E \times \{1, 2\}$
    - $i' = [i, 1]$
    - $F' = F \times \{1, 2\}$
    - $\Gamma' = \Gamma \cup \{\langle\}, \langle \notin \Gamma$

$[e, k] \in E'$, onde e é o estado atingido por M e k a trilha processada por M'

E como são as transições?

MT com Fita Ilimitada Em Ambas as Direções

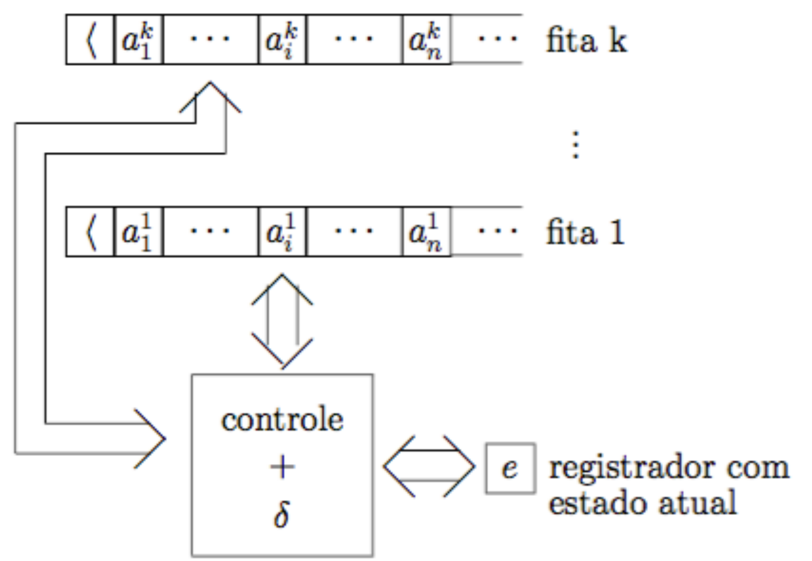
- MT com fita ilimitada em ambas as direções → MT com 2 trilhas

  - Para cada transição $\delta(e, a) = [e', b, \mathrm{D}]$
    - $\delta'([e, 1], a, c) = [[e', 1], b, c, \mathrm{D}]$ para cada $c \in \Gamma$
    - $\delta'([e, 2], c, a) = [[e', 2], c, b, \mathrm{E}]$ para cada $c \in \Gamma$
    - $\delta'([e, 1], \langle, a) = \delta'([e, 2], \langle, a) = [[e', 1], \langle, b, \mathrm{D}]$

  - Para cada transição $\delta(e, a) = [e', b, \mathrm{E}]$
    - $\delta'([e, 1], a, c) = [[e', 1], b, c, \mathrm{E}]$ para cada $c \in \Gamma$
    - $\delta'([e, 2], c, a) = [[e', 2], c, b, \mathrm{D}]$ para cada $c \in \Gamma$
    - $\delta'([e, 1], \langle, a) = \delta'([e, 2], \langle, a) = [[e', 2], \langle, b, \mathrm{D}]$

MT com Múltiplas Fitas

- Em uma máquina com múltiplas fitas, cada fita tem seu cabeçote de leitura/escrita
  - Em cada transição os cabeçotes são operados independentemente; nesse caso é útil adicionar a capacidade do cabeçote ficar imóvel
  - Cada fita tem ⟨ na sua primeira posição para evitar movimento de seu cabeçote para a esquerda, e da segunda posição adiante
    - Na primeira fita a palavra de entrada é seguida de ⊔
    - Nas outras fitas somente ⊔
  - Todos os cabeçotes começam na segunda posição da fita respectiva



MT com Múltiplas Fitas

- Uma máquina de k fitas é uma óctupla $(E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i, F)$, onde
  - E, Σ, Γ, i e F são como em MTs padrão
  - δ é uma função de $E \times \Gamma^k$ para $\mathrm{E} \times (\Gamma \times \{\mathrm{D, E, I}\})^k$
- Uma configuração instantânea de uma MT com k fitas tem a forma

$$[e, x_1\underline{a_1}y_1, x_2\underline{a_2}y_2, \ldots, x_k\underline{a_k}y_k]$$

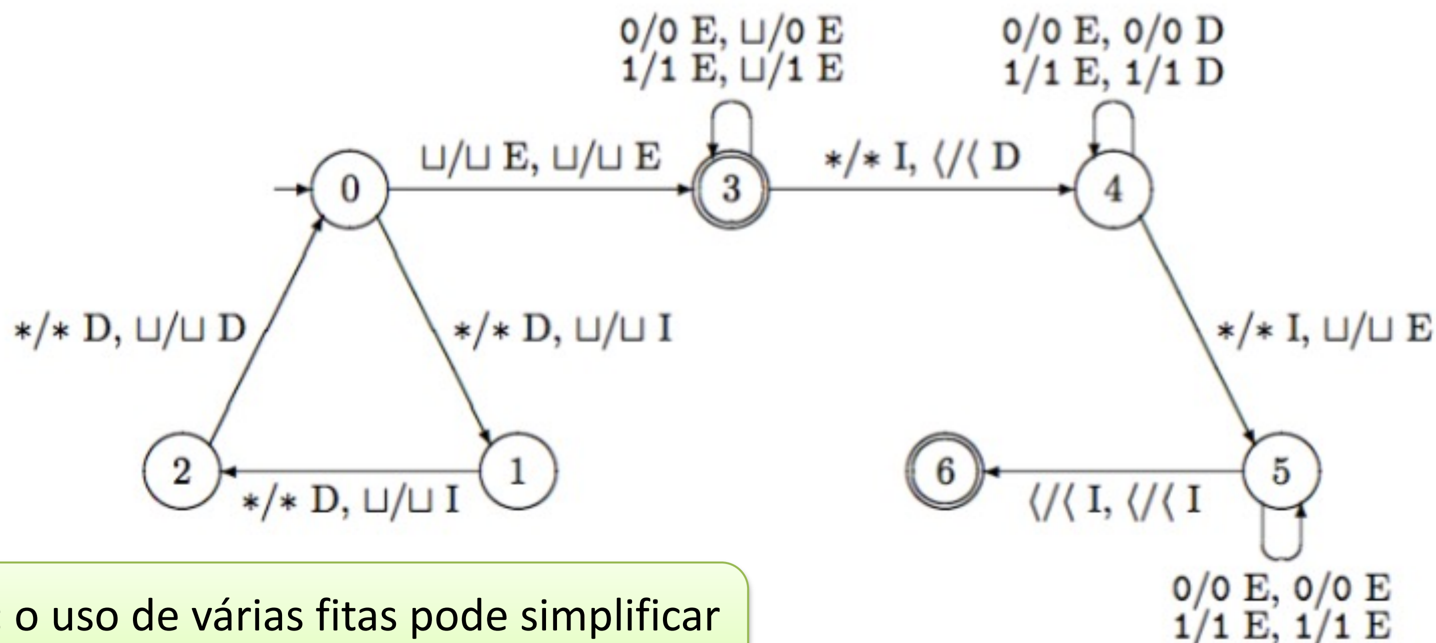
  - nesse caso, não há a restrição de que $|x_i| = |x_j|$ para $i \neq j$
- A linguagem aceita por uma MT de k fitas, $M = (E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i, F)$, é o conjunto das palavras $w \in \Sigma^*$ tais que

$$[i, \langle\underline{w}, \langle\underline{\sqcup}, \ldots, \langle\underline{\sqcup}] \overset{*}{\vdash} [e, x_1\underline{a_1}y_1, x_2\underline{a_2}y_2, \ldots, x_k\underline{a_k}y_k]$$

  - onde $e \in F$ e $\delta(e, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ é indefinido

MT com Múltiplas Fitas

- Por exemplo: o diagrama de estados de uma MT de duas fitas que reconhece a linguagem $L = \{ww^Rw \mid w \in \{0, 1\}^*\}$
  - Para simplificar o diagrama, usou-se $*$ para denotar "qualquer símbolo do alfabeto de entrada"



Dica: o uso de várias fitas pode simplificar bastante a obtenção de uma MT

MT com Múltiplas Fitas

- MT padrão → MT com múltiplas fitas
  - Uma MT padrão nada mais é do que uma máquina “multifita” com apenas uma fita
  - Uma MT padrão pode ser simulada por uma MT multifita em que todas as transições desprezam todas as fitas, com exceção da fita 1

E o inverso?

MT com Múltiplas Fitas

- MT com k fitas → MT com $2k$ trilhas
  - Uma máquina de k fitas pode ser simulada por meio de uma máquina de $2k$ trilhas
  - Por exemplo: uma MT com 2 fitas pode ser simulada por uma MT de 4 trilhas
    - A trilha 1 terá o conteúdo da fita 1
    - A trilha 2 o marcador da posição do cabeçote da fita 1
    - A trilha 3 terá o conteúdo da fita 2
    - A trilha 4 o marcador da posição do cabeçote da fita 2

Detalhes do algoritmo
no livro-texto

MT Não Determinísticas

- Uma MT não determinística é uma MT que admite mais de uma transição partindo de um certo estado sob um certo símbolo
  - Podem existir várias computações possíveis para o processamento de uma palavra
  - Uma palavra é aceita quando **existe uma computação** para a qual a **máquina para em um estado final**

MT Não Determinísticas

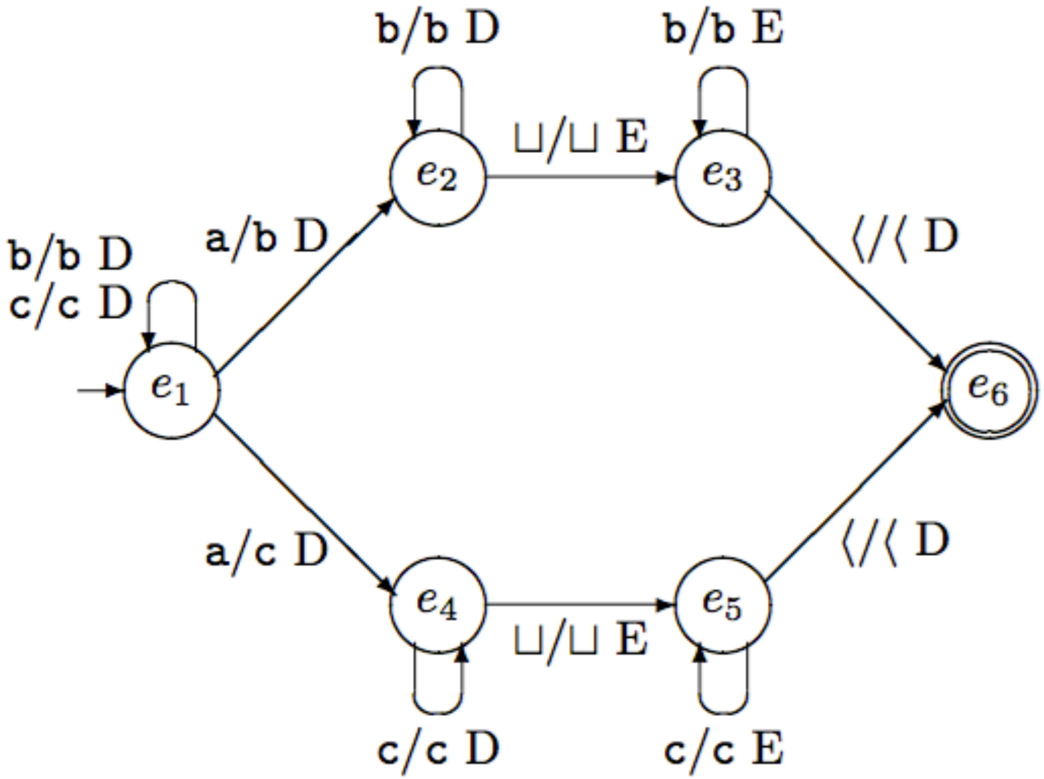
- Uma MT não determinística é uma óctupla $(E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i, F)$, onde
  - $E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, i$ e F são como em MT padrão
  - δ é uma função total de $E \times \Gamma$ para $\mathrm{P}(E \times \Gamma \times \{\mathrm{D}, \mathrm{E}\})$
    - No caso em que $\delta(e, a) = \emptyset$ para $e \in E$ e $a \in \Sigma$, não há transição do estado e sob a; corresponde ao caso em que, em uma MT padrão, $\delta(e, a)$ é indefinido

- A linguagem aceita pela máquina é

$$\{ w \in \Sigma^* \mid [i , \langle \underline{w}] \overset{*}{\vdash} [e, x\underline{a}y], \delta(e, a) = \emptyset \text{ e } e \in \mathrm{F} \}$$

MT Não Determinísticas

- Por exemplo: diagrama de estados de uma MT não determinística que aceita a linguagem $L = b^*ab^* + c^*ac^*$



MT Não Determinísticas

- MT padrão → MT não determinística
  - Uma MT padrão M é um caso particular de MT não determinística M', portanto basta simular M em M'

MT Não Determinísticas

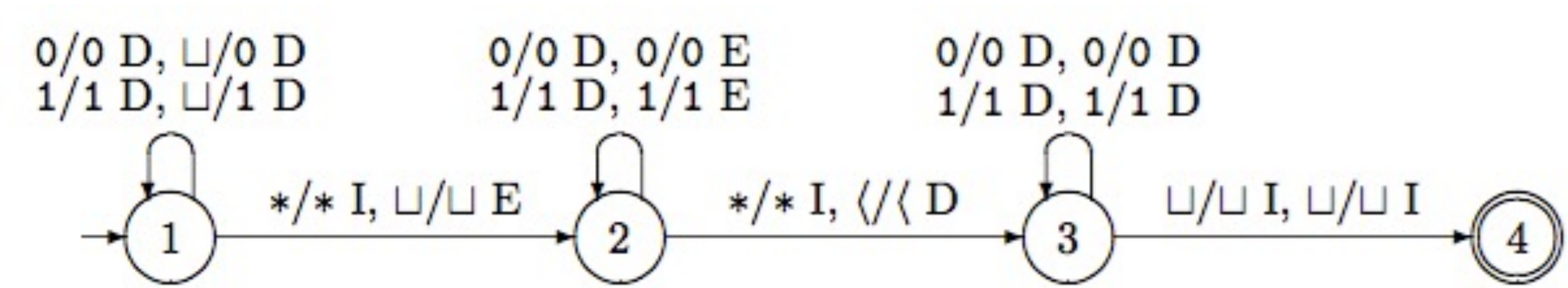
- MT não determinística → MT de 3 fitas
  - Simular uma máquina de Turing não determinística $M = (E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i, F)$ por meio de uma MT determinística M' de 3 fitas; a ideia é simular, de forma sistemática, as computações possíveis
    - Fita 1: a palavra de entrada
    - Fita 2: fita na qual a máquina irá operar
    - Fita 3: uma computação possível (sequência de transições)

1. Inicialize fita 3 com a palavra 1;
2. **ciclo**
   2.1 copie a palavra de entrada da fita 1 para a fita 2;
   2.2 simule M na fita 2 de acordo com a palavra na fita 3;
   se M parar em estado final, aceite;
   2.3 apague a fita 2;
   2.4 gere próxima palavra na fita 3
   fimciclo.

Detalhes do algoritmo no livro-texto

MT Não Determinísticas

- Outro exemplo: máquina de Turing de duas fitas não determinística para $L = \{ww^R w \mid w \in \{0, 1\}^*\}$



Conclusão

- Máquinas de Turing podem ser estendidas para utilizar
  - os incrementos isolados ou uns compostos com outros
  - outro critério de reconhecimento, por parada e/ou estado final

- Todas as variações de Máquinas de Turing reconhecem exatamente a mesma classe de linguagens: a classe das **LREs**

ISSO É TUDO, PESSOAL!