Linguagens Formais e Autômatos

LLCs: Lema do Bombeamento e Propriedades de Fechamento

Andrei Rimsa Álvares
andrei@cefetmg.br

Sumário

- Lema do bombeamento
- Propriedades de fechamento
- Decidibilidade

LEMA DO BOMBEAMENTO

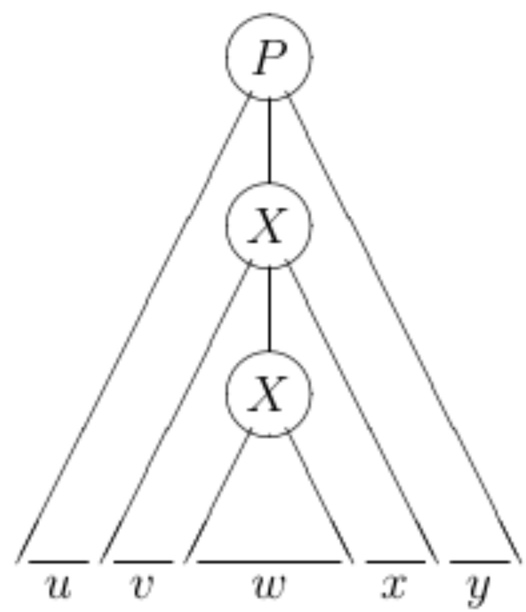
Lema do Bombeamento

- O **lema do bombeamento** para **linguagens regulares** foi obtido raciocinando-se sobre **autômatos finitos** que reconhecem tais linguagens

- Já o **lema do bombeamento** para **linguagens livres de contexto** é mais facilmente obtido raciocinando-se a partir de **gramáticas livres de contexto** que geram tais linguagens, ao invés de autômatos de pilha
  - Mais especificamente, será utilizada a estrutura de árvores de derivação associadas a gramáticas livres de contexto

Lema do Bombeamento

- **Lema:** Seja L uma linguagem livre de contexto. Então existe uma constante $k > 0$ tal que para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$ existem u, v, w, x e y que satisfazem as seguintes condições
  - $z = uvwxy$
  - $|vwx| \leq k$
  - $vx \neq \lambda$
  - $uv^iwx^iy \in L, \forall i \geq 0$



$$P \overset{*}{\Rightarrow} uXy$$

$$X \overset{*}{\Rightarrow} vXx$$

$$X \overset{*}{\Rightarrow} w$$

Lema do Bombeamento

- O lema do bombeamento pode ser usado para provar que uma linguagem infinita L **não é livre de contexto**

  - supõe-se que L seja linguagem livre de contexto
  - supõe-se $k > 0$, a constante do LB
  - escolhe-se uma palavra z, tal que $|z| \geq k$
  - mostra-se que, para toda decomposição de z em $uvwxy$, tal que, $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, existe i tal que $uv^iwx^iy \notin L$

Exemplo

- Demonstrar que $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$ não é livre de contexto

Suponha que L seja livre de contexto. Seja k a constante do lema do bombeamento e $z = a^k b^k c^k$. Como $|z| \geq k$, o lema diz que existem u, v, w, x, y de forma que as seguintes condições se verifiquem

- $z = uvwxy$
- $|vwx| \leq k$
- $vx \neq \lambda$
- $uv^i wx^i y \in L, \forall i \geq 0$

Suponha então que $a^k b^k c^k = uvwxy$, $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$. Considera-se dois casos

- vx contém algum a. Como $|vwx| \leq k$, vx não contém c's. Portanto, uv^2wx^2y contém mais a's do que c's. Assim $uv^2wx^2y \notin L$
- vx não contém a. Como $vx \neq \lambda$, uv^2wx^2y contém menos a's do que b's e/ou c's. Assim $uv^2wx^2y \notin L$

Logo, em qualquer caso $uv^2wx^2y \notin L$, contrariando o lema do bombeamento. Portanto, L não é linguagem livre de contexto

Outro Exemplo

- Demonstrar que $L = \{0^n \mid n \text{ é primo}\}$ não é livre de contexto

Suponha que L seja livre de contexto. Seja k a constante do lema do bombeamento e $z = 0^n$, onde n é um número primo maior que k. Como $|z| \geq k$ o lema diz que existem u, v, w, x, y tais que

- $z = uvwxy$
- $|vwx| \leq k$
- $vx \neq \lambda$
- $uv^iwx^iy \in L, \forall i \geq 0$

Para provar que L não é livre de contexto, basta mostrar um i tal que $uv^iwx^iy \notin L$, contrariando o lema do bombeamento. Pelas informações anteriores, tem-se que $uv^iwx^iy = 0^{n+(i-1)|vx|}$, pois $z = 0^n$. Assim, i deve ser tal que $n + (i - 1)|vx|$ não seja um número primo.

Ora, para isso, basta fazer $i = n + 1$, obtendo-se $n + (i - 1)|vx| = n + n|vx| = n(1 + |vx|)$, que não é primo (pois $|vx| > 0$). Assim, $uv^{n+1}wx^{n+1}y \notin L$, contradizendo o lema do bombeamento. Logo, L não é livre de contexto.

PROPRIEDADES DE FECHAMENTO

Propriedades de Fechamento

- **Teorema:** A classe das linguagens livres de contexto **é** fechada sob
  - **união**
  - **concatenação**
  - **fecho de Kleene**

- **Teorema:** A classe das linguagens livres de contexto **não é** fechada sob
  - **interseção**
  - **complemento**

LLCs São Fechadas Sob

- Sejam duas LLCs L_1 e L_2 com gramáticas $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, P_1)$ e $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, P_2)$, com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
  - **União** ($L_1 \cup L_2$): Gramática $G_u = (V_3, \Sigma_3, R_3, P_3)$
    - $V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{P_3\}$
    - $\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
    - $R_3 = R_1 \cup R_2 \cup \{P_3 \rightarrow P_1 \mid P_2\}$
    - $P_3 \notin V_1 \cup V_2$
  - **Concatenação** ($L_1 L_2$): Gramática $G_c = (V_3, \Sigma_3, R_3, P_3)$
    - $V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{P_3\}$
    - $\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
    - $R_3 = R_1 \cup R_2 \cup \{P_3 \rightarrow P_1 P_2\}$
    - $P_3 \notin V_1 \cup V_2$
  - **Fecho de Kleene** (L_1^*): Gramática $G_k = (V_3, \Sigma_3, R_3, P_3)$
    - $V_3 = V_1 \cup \{P_3\}$
    - $\Sigma_3 = \Sigma_1$
    - $R_3 = R_1 \cup \{P_3 \rightarrow P_1 P_3, P_3 \rightarrow \lambda\}$
    - $P_3 \notin V_1 \cup V_2$

LLCs Não São Fechadas Sob

- **Interseção:** Sejam as linguagens livres de contexto $L_1 = \{a^n b^n c^k \mid n, k \geq 0\}$ e $L_2 = \{a^n b^k c^n \mid n, k \geq 0\}$

  $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ que **não é** livre de contexto

- **Complemento:** *De Morgan* diz que $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

  Logo, como as LLCs são fechadas sob união, se elas fossem fechadas sob complementação, seriam fechadas também sob interseção. Logo, as LLCs não são fechadas sob complementação

Teorema Importante

- **Teorema:** Se L é uma linguagem livre de contexto e R uma linguagem regular, então $L \cap R$ é linguagem livre de contexto
  - A ideia é simular a execução em paralelo de um APN que reconhece L e um AFD que reconhece R (a pilha é de L)

- Sejam APN $M_1 = (E_1, \Sigma_1, \Gamma, \delta_1, I, F_1)$ para L e AFD $M_2 = (E_2, \Sigma_2, \delta_2, i, F_2)$ para R, o APN $M_3 = (E_3, \Sigma_3, \Gamma, \delta_3, I', F_3)$ para $L \cap R$
  - $E_3 = E_1 \times E_2$
  - $\Sigma_3 = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$
  - $\delta_3((e_1, e_2), a, A) = [(e_1', e_2'), z]$, para cada par de transições
    $\delta_1(e_1, a, A) = [e_1', z]$ e $\delta_2(e_2, a) = e_2'$
    $\delta_3((e_1, e_2), \lambda, A) = [(e_1', e_2), z]$, para cada transição λ
    $\delta_1(e_1, \lambda, A) = [e_1', z]$ e para cada $e_2 \in E_2$
  - $I' = I \times \{i\}$
  - $F_3 = F_1 \times F_2$

Exemplo

- A linguagem $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ tem o mesmo número de a's, b's e c's$\}$ não é livre de contexto

Suponha que L seja livre de contexto. Como $R = \{a^*b^*c^*\}$ é uma linguagem regular, então $L \cap R$ é linguagem livre de contexto. Mas $L \cap R = \{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$ não é linguagem livre de contexto. Logo, L não é linguagem livre de contexto.

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

DECIDIBILIDADE

Linguagens Formais e Autômatos

Decidibilidade

- Classifique os seguintes problemas
  - Determinar se $w \in L(G)$ para qualquer GLC G e palavra w
  - Determinar se $L(G)$ é vazia, para qualquer GLC G
  - Determinar se G é ambígua para qualquer GLC G
  - Determinar se $L(G) = \Sigma^*$ para qualquer GLC G
  - Verificar se $L(G_1) \cap L(G_2)$ para quaisquer GLCs G_1 e G_2
  - Determinar se $L(G_1) \subseteq L(G_2)$ para quaisquer GLCs G_1 e G_2
  - Determinar se $L(G_1) = L(G_2)$ para quaisquer GLCs G_1 e G_2

Decidibilidade

- Problemas **decidíveis**
  - Determinar se $w \in L(G)$ para qualquer GLC G e palavra w
  - Determinar se $L(G)$ é vazia para qualquer GLC G

- Problemas **indecidíveis**
  - Determinar se G é ambígua para qualquer GLC G
  - Determinar se $L(G) = \Sigma^*$ para qualquer GLC G
  - Verificar se $L(G_1) \cap L(G_2)$ para quaisquer GLCs G_1 e G_2
  - Determinar se $L(G_1) \subseteq L(G_2)$ para quaisquer GLCs G_1 e G_2
  - Determinar se $L(G_1) = L(G_2)$ para quaisquer GLCs G_1 e G_2

ISSO É TUDO, PESSOAL!