CEFET-MG CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

Linguagens Formais e Autômatos

LRs: Lema do Bombeamento e Propriedades de Fechamento

Andrei Rimsa Álvares
andrei@cefetmg.br

CEFET-MG

DECOM

Sumário

- Introdução
- Lema do Bombeamento
- Propriedades de Fechamento

INTRODUÇÃO

Introdução

- O que é uma linguagem regular?

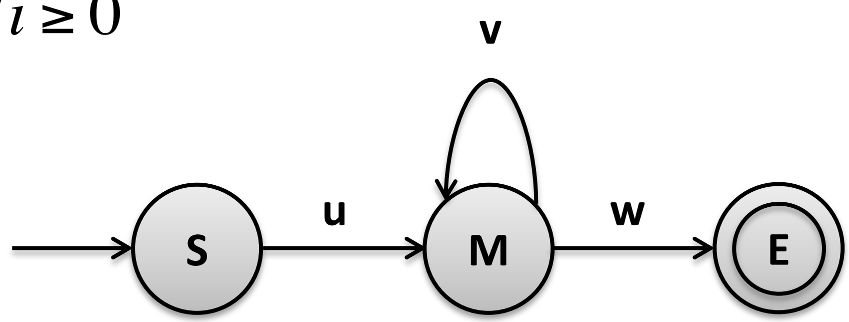
Definição: uma linguagem é dita ser uma linguagem regular se existe um autômato finito que a reconhece

- Dada uma linguagem *L*
  - É possível determinar se ela pertence ou não à classe das linguagens regulares?
  - É possível facilitar a obtenção de um AF para *L*?

LEMA DO BOMBEAMENTO

Lema do Bombeamento

- **Lema:** Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante $k > 0$ tal que, para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$, existem u, v e w que satisfazem as condições
  - $z = uvw$
  - $|uv| \leq k$
  - $v \neq \lambda$
  - $uv^iw \in L, \forall i \geq 0$



Lema do Bombeamento

- O lema do bombeamento (LB) pode ser usado para provar que uma linguagem infinita L **não é regular**:

1. supõe-se que L seja linguagem regular
2. supõe-se $k > 0$, a *constante do LB*
3. escolhe-se uma palavra z, tal que $|z| \geq k$
4. mostra-se que, para toda decomposição de z em uvw, tal que, $|uv| \leq k$ e $v \neq \lambda$, existe i tal que $uv^i w \notin L$

Cuidado: O LB não pode ser usado para mostrar que uma linguagem é regular!

Exemplo LB

- Demonstrar que $L = \{a^n b^n \mid n \in N\}$ não é regular

Suponha que L seja uma linguagem regular. Seja k a constante do LB e $z = a^k b^k$. Como $|z| \geq k$, o lema diz que existem u, v e w tais que:

- $z = uvw$
- $|uv| \leq k$
- $v \neq \lambda$
- $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$

Nesse caso, v só tem a's, pois $uvw = a^k b^k$ e $|uv| \leq k$, e v tem pelo menos um a porque $v \neq \lambda$. Isso implica que $uv^2 w = a^{k+|v|} b^k \notin L$, o que contradiz o LB. Portanto, L não é linguagem regular.

Exemplo LB

- Demonstrar que $L = \{0^m 1^n \mid m > n\}$ não é regular

Suponha que L seja uma linguagem regular. Seja k a constante do LB e $z = 0^{k+1} 1^k$. Como $|z| \geq k$, o lema diz que existem u, v e w tais que:

- $z = uvw$
- $|uv| \leq k$
- $v \neq \lambda$
- $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$

Como $uvw = 0^{k+1} 1^k$ e $0 < |v| \leq k$, v só tem 0's e possui no mínimo um 0. Logo $uv^0 w = 0^{k+1-|v|} 1^k \notin L$, o que contradiz o LB. Portanto, L não é linguagem regular.

Exemplo LB

- Demonstrar que $L = \{0^n \mid n$ é um número primo $\}$ não é regular

Suponha que L seja uma linguagem regular. Seja k a constante do LB e $z = 0^n$, em que n é um primo maior ou igual a k. Como $|z| \geq k$, basta mostrar que $uv^iw \notin L$ supondo que $z = uvw$, $|uv| \leq k$ e $v \neq \lambda$. Como $z = 0^n$, $uv^iw = 0^{n+(i-1)|v|}$. Assim, i deve ser tal que $n + (i - 1)|v|$ não seja um número primo. Ora, para isso basta fazer i = n +1, obtendo-se $n + (i - 1)|v| = n + n|v| = n(1 + |v|)$, que não é primo, pois $|v| > 0$. Desse modo, $uv^{n+1}w \notin L$, o que contradiz o LB. Logo, L não é linguagem regular.

Lema do Bombeamento

- Toda linguagem regular atende ao lema do bombeamento, mas nem toda linguagem que atende ao lema do bombeamento é regular

- Considere a seguinte linguagem L sobre $\Sigma = \{0,1,a\}$

$$L = \{0,1\}^* \cup \{a0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}\{0,1\}^*\{a\}\{0,1,a\}^*$$

  – Essa linguagem atende ao lema do bombeamento, mas não é regular

PROPRIEDADES DE FECHAMENTO

Definição de Fechamento

- Seja $\circ$ uma operação binária sobre os elementos de um conjunto A qualquer. Dizemos que $\circ$ é **fechada** em A se e somente se

$$\forall a_1, a_2 \in A \rightarrow a_1 \circ a_2 \in A$$

  – Exemplo
    - Operação $+$ sobre o conjunto N
    - Operação $-$ sobre o conjunto Z

- O mesmo pode ser aplicado para linguagens
  – Seja uma classe de linguagens $\mathcal{L}$ e uma operação sobre linguagens O; diz-se que $\mathcal{L}$ é **fechada sob** O se a aplicação de O a linguagens de $\mathcal{L}$ resulta sempre em uma linguagem de $\mathcal{L}$

Propriedades de Fechamento

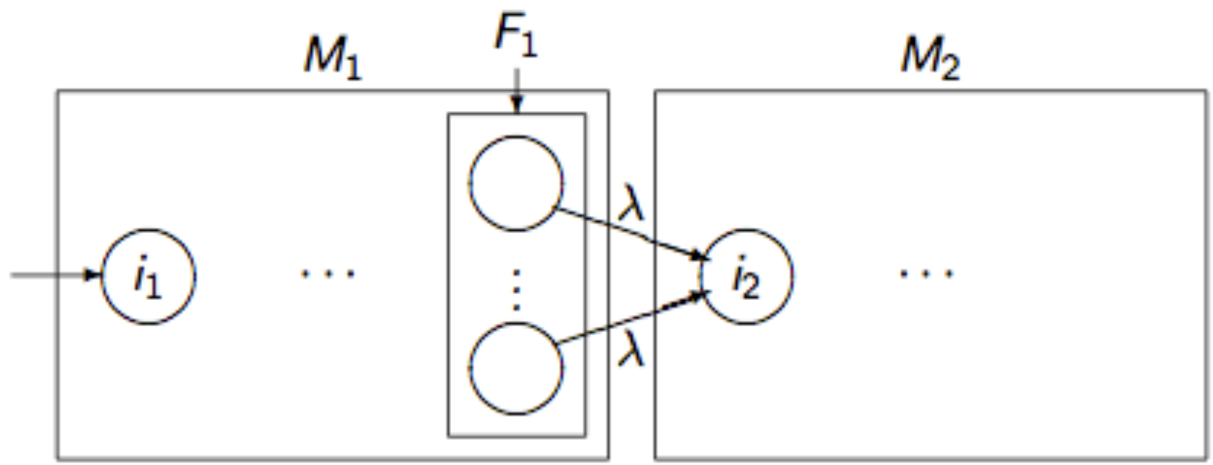
- A classe das linguagens regulares é fechada sob
  - Complementação
  - União
  - Interseção
  - Concatenação
  - Fecho de Kleene

Já vimos que isso é verdade para a **complementação**, **união** e **interseção**!

Concatenação

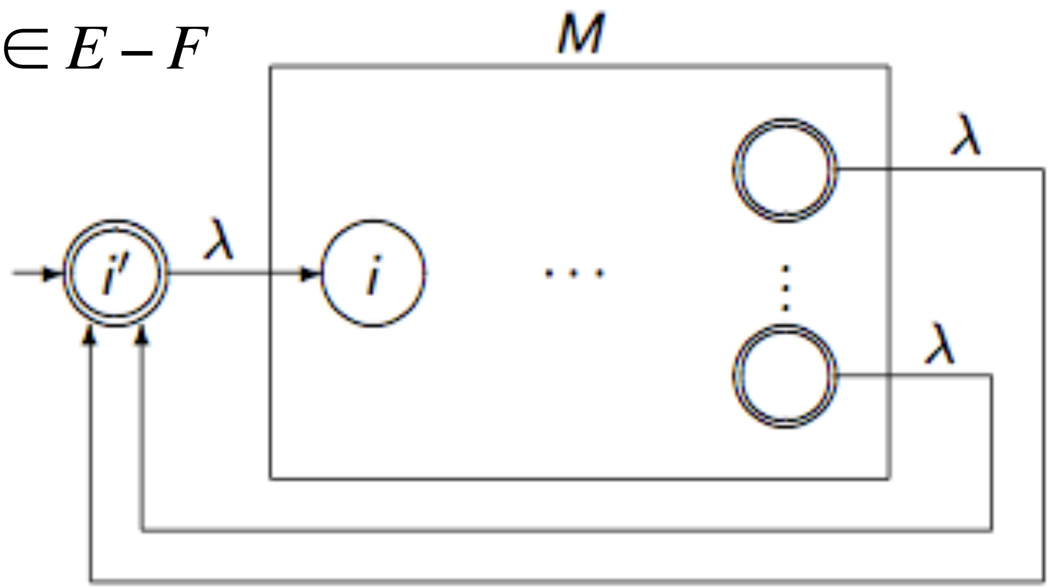
- Sejam dois AFDs $M_1 = (E_1, \Sigma_1, \delta_1, i_1, F_1)$ e $M_2 = (E_2, \Sigma_2, \delta_2, i_2, F_2)$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. O AFN λ M_3 reconhece $L(M_1)\,L(M_2)$: $M_3 = (E_1 \cup E_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta_3, \{i_1\}, F_2)$

  - $\delta_3(e,a) = \{\delta_1(e,a)\}, \forall e \in E_1, a \in \Sigma_1$
  - $\delta_3(e,a) = \{\delta_2(e,a)\}, \forall e \in E_2, a \in \Sigma_2$
  - $\delta_3(e,\lambda) = \{i_2\}, \forall e \in F_1$
  - $\delta_3(e,\lambda) = \emptyset, \forall e \in (E_1 \cup E_2) - F_1$



Fecho de Kleene

- Seja um AFD $M = (E, \Sigma, \delta, i, F)$. O AFN λ M' reconhece $L(M)^*$: $M' = (E \cup \{i'\}, \Sigma, \delta', \{i'\}, F \cup \{i'\})$, $i' \notin E$
  - $\delta'(i', \lambda) = \{i\}$
  - $\delta'(e, a) = \{\delta(e, a)\}, \forall e \in E, a \in \Sigma$
  - $\delta'(e, \lambda) = \{i'\}, \forall e \in F$
  - $\delta'(e, \lambda) = \varnothing, \forall e \in E - F$



Aplicação das Propriedades de Fechamento

- As propriedades de fecho das linguagens regulares podem ser aplicadas em três casos

  1. Provar que uma linguagem é regular
  2. Provar que uma linguagem não é regular
  3. Facilitar a obtenção de um autômato finito para uma linguagem regular

Aplicação 1: Linguagem É Regular

- Sejam

$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ representa número divisível por 6 $\}$
$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ o terceiro dígito, da esquerda para direita, é 1 $\}$

- L_1 - L_2 é regular?

Sabe-se que L_1 e L_2 são regulares e $L = L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$.
Como as linguagens regulares são fechadas sob **interseção** e **complementação**, então L é linguagem regular.

Aplicação 2: Linguagem Não É Regular

- Seja

$$L = \{a^k b^m c^n \mid k = m + n\}$$

- L é regular?

Suponha que L é uma linguagem regular. Como $\{a\}^*\{b\}^*$ é linguagem regular e a classe das linguagens regulares é fechada sob interseção, então $L \cap \{a\}^*\{b\}^*$ deve ser uma linguagem regular. Mas a linguagem a seguir não é regular $L \cap \{a\}^*\{b\}^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Portanto, L não é uma linguagem regular.

Aplicação 3: Facilitar Obtenção de AF para LR

- Sejam

$$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ representa número divisível por 6 } \}$$
$$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ o terceiro dígito, da esquerda para direita, é 1 } \}$$

- Existe AFD para $L_1 - L_2$?

Sabe-se que existe AFD para L_1 e L_2 e $L = L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$. Usando as técnicas vistas anteriormente, pode-se construir facilmente um AFD para $\overline{L_2}$ e, em seguida, um AFD para $L_1 \cap \overline{L_2}$. Assim, tem-se um AFD para L.

ISSO É TUDO, PESSOAL!