Linguagens Formais e Autômatos

Autômatos Finitos Não Determinísticos (AFNs)

Andrei Rimsa Álvares
andrei@cefetmg.br

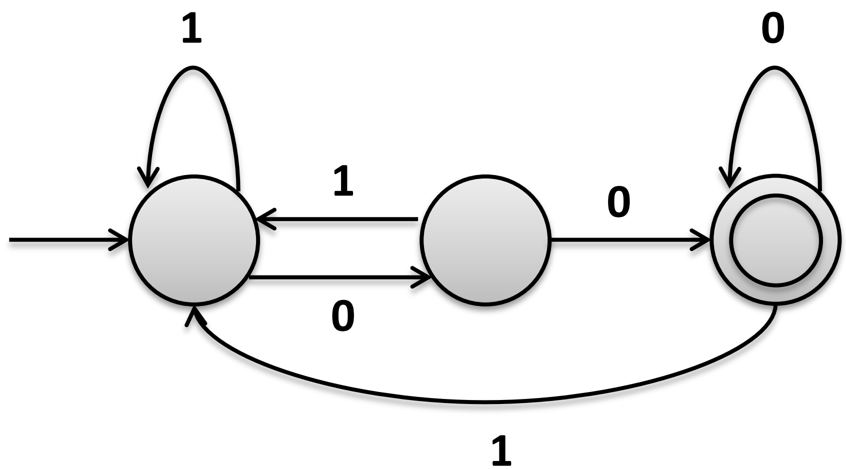
Sumário

- Introdução
- Autômatos Finitos Não Determinísticos (AFNs)
- Equivalência entre AFDs e AFNs
- AFN estendido

INTRODUÇÃO

Introdução

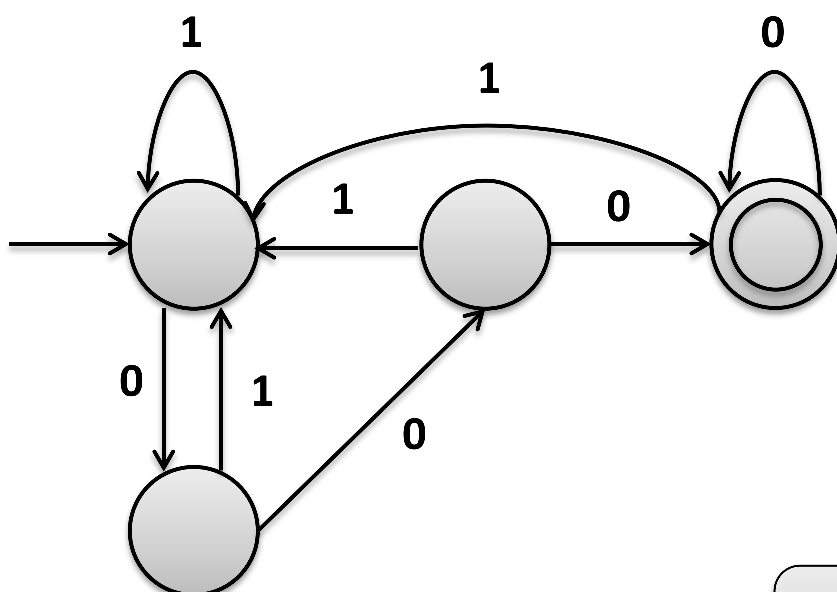
- Considere o AFD para a linguagem $L = \{0,1\}^*\{00\}$



E para a linguagem
$L = \{0,1\}^*\{000\}$

Introdução

- Considere o AFD para a linguagem $L = \{0,1\}^*\{000\}$



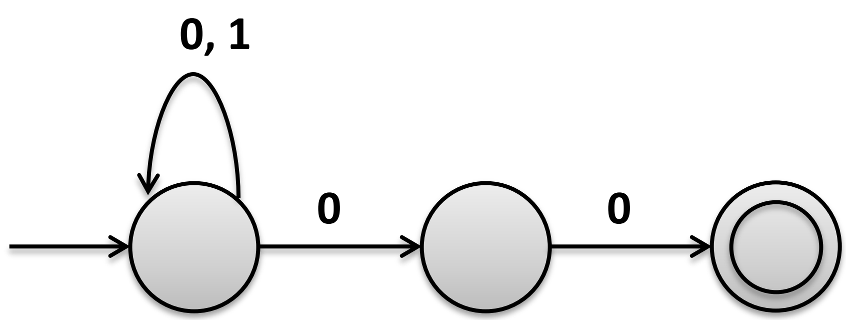
Deveria ser mais fácil, não?

Introdução

- Em ambos os exemplos a maior parte da lógica foi para garantir que a palavra terminasse com *00* ou *000*
  - Mas parece tão fácil reconhecer que uma palavra termina com *00* ou *000*

- Uma definição mais natural seria

O que tem de diferente aqui?



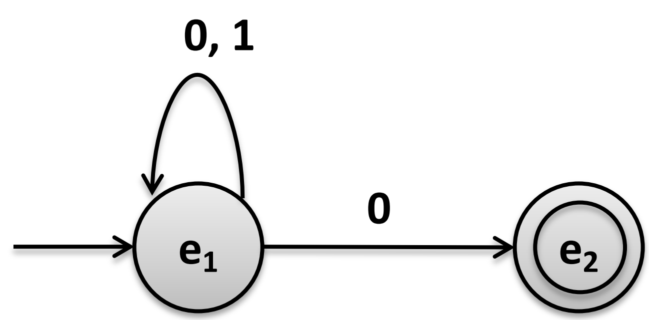
$$L = \{0,1\}^*\{00\}$$

AUTÔMATO FINITO NÃO DETERMINÍSTICO (AFN)

AFN

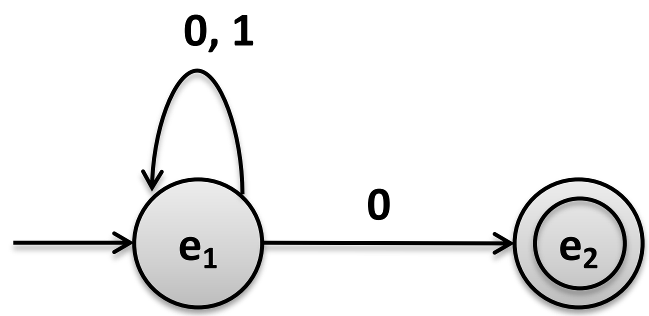
- Em um autômato finito determinístico (AFD), cada par (estado, símbolo) é uma transição para um **único estado**

- Se esta restrição for eliminada, se para algum par (estado, símbolo) houver transições para dois ou mais estados, então tem-se um **autômato finito não determinístico** (**AFN**)



AFN

- O não determinismo se verifica pela **indecisão** associada ao estado e_1, que possui duas transições sob o símbolo *0*



- Para a palavra *1010*, há as seguintes computações possíveis, dependendo do caminho tomado

$$
\begin{array}{lllll}
[e_1, 1010] \vdash [e_1, 010] & \vdash [e_1, 10] \vdash [e_1, 0] & \vdash [e_1, \lambda] \\
 & \llcorner [e_2, 10] & \llcorner [e_2, \lambda]
\end{array}
$$

Quando um AFN reconhece uma palavra?

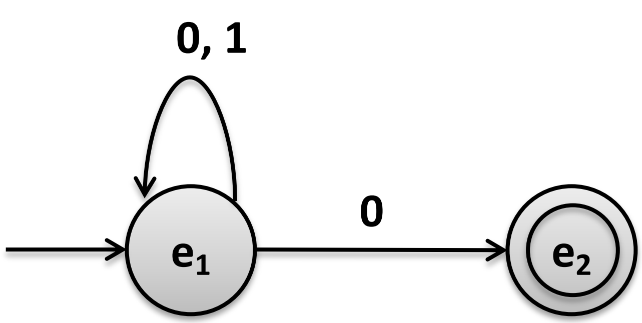
AFN

- Com relação ao reconhecimento para AFN
  - Uma palavra é reconhecida se e somente se **existe** uma computação que a consome e termina em estado final
  - Em todo ponto de indecisão, a máquina **adivinha** qual escolha (se houver alguma) leva a uma computação que resulta em sucesso no reconhecimento

AFN

- Um AFN é uma quíntupla $(E, \Sigma, \delta, I, F)$, em que
  - E é um conjunto finito não vazio de estados
  - Σ é um alfabeto
  - $\delta : E \times \Sigma \rightarrow \mathrm{P}(E)$ é a função de transição (função total)
  - $I \subseteq E$ é um conjunto não vazio de estados iniciais
  - $F \subseteq E$ é um conjunto de estados finais

- Exemplo de AFN



$$(\{e_1, e_2\}, \{0,1\}, \delta, \{e_1\}, \{e_2\})$$

δ	*0*	*1*
e_1	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1\}$
e_2	$\emptyset$	$\emptyset$

Função de Transição Estendida

- A **função de transição estendida** para um AFN $M = (E, \Sigma, \delta, I, F)$, $\hat{\delta} : \mathrm{P}(E) \times \Sigma^* \rightarrow \mathrm{P}(E)$ é definida recursivamente como segue

  a) $\hat{\delta}(\phi, w) = \phi, \forall w \in \Sigma^*$

  b) $\hat{\delta}(A, \lambda) = A, \forall A \subseteq E$

  c) $\hat{\delta}(A, ay) = \hat{\delta}(\bigcup_{e \in A} \delta(e, a), y), \forall A \subseteq E, a \in \Sigma, y \in \Sigma^*$

- Exemplo

δ	*0*	*1*
e_1	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1\}$
e_2	$\emptyset$	$\emptyset$

$$
\begin{aligned}
\hat{\delta}(\{e_1\}, 1010) &= \hat{\delta}(\delta(e_1, 1), 010) && \text{por } c \\
&= \hat{\delta}(\{e_1\}, 010) && \text{por } \delta \\
&= \hat{\delta}(\delta(e_1, 0), 10) && \text{por } c \\
&= \hat{\delta}(\{e_1, e_2\}, 10) && \text{por } \delta \\
&= \hat{\delta}(\delta(e_1, 1) \cup \delta(e_2, 1), 0) && \text{por } c \\
&= \hat{\delta}(\{e_1\} \cup \emptyset, 0) && \text{por } \delta \\
&= \hat{\delta}(\{e_1\}, 0) && \\
&= \hat{\delta}(\delta(e_1, 0), \lambda) && \text{por } c \\
&= \hat{\delta}(\{e_1, e_2\}, \lambda) && \text{por } \delta \\
&= \{e_1, e_2\} && \text{por } b
\end{aligned}
$$

Linguagem Reconhecida por AFN

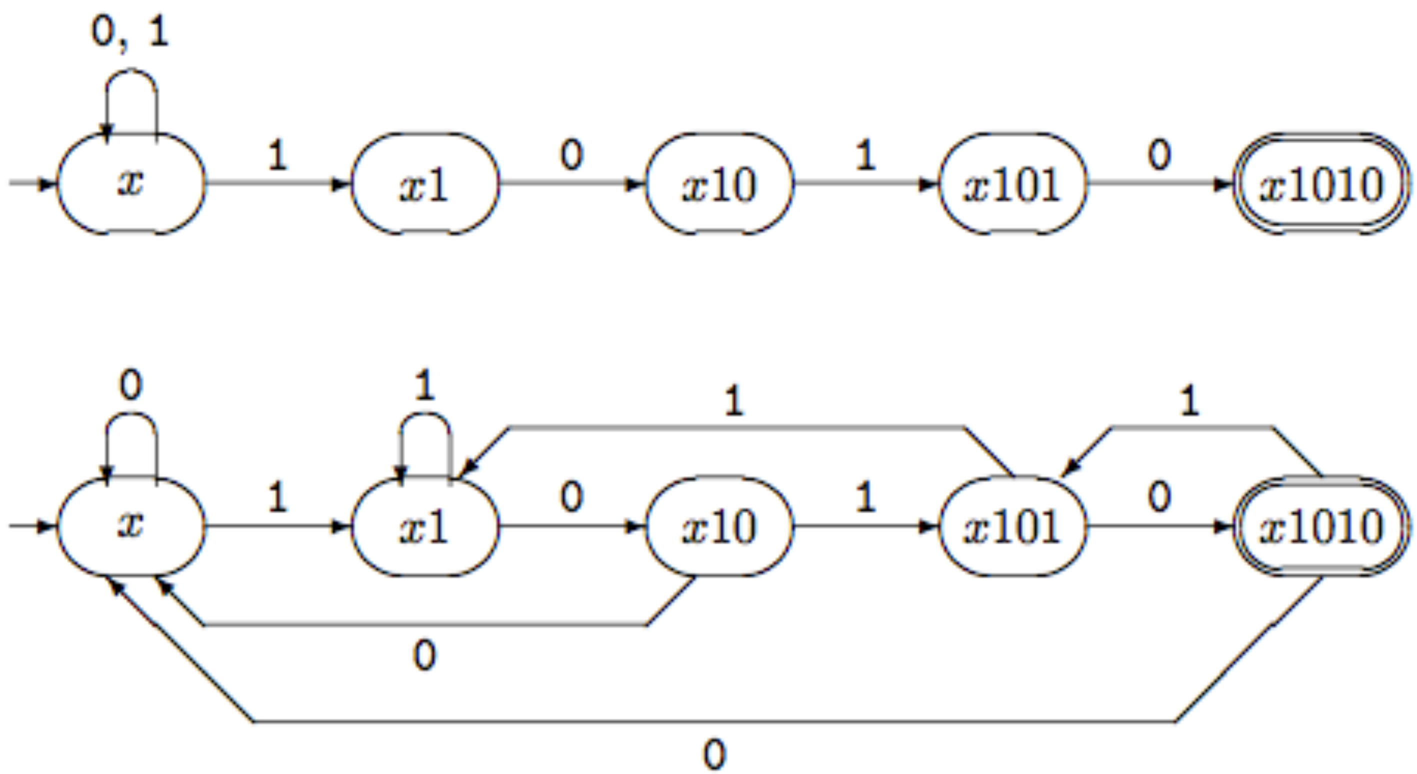
- A linguagem reconhecida por um AFN $M=(E,\Sigma,\delta,I,F)$ é dada por

$$L(M)=\{w\in\Sigma^{*}\mid \hat{\delta}(I,w)\cap F\neq\phi\}$$

AFNs possuem maior poder computacional que AFDs?

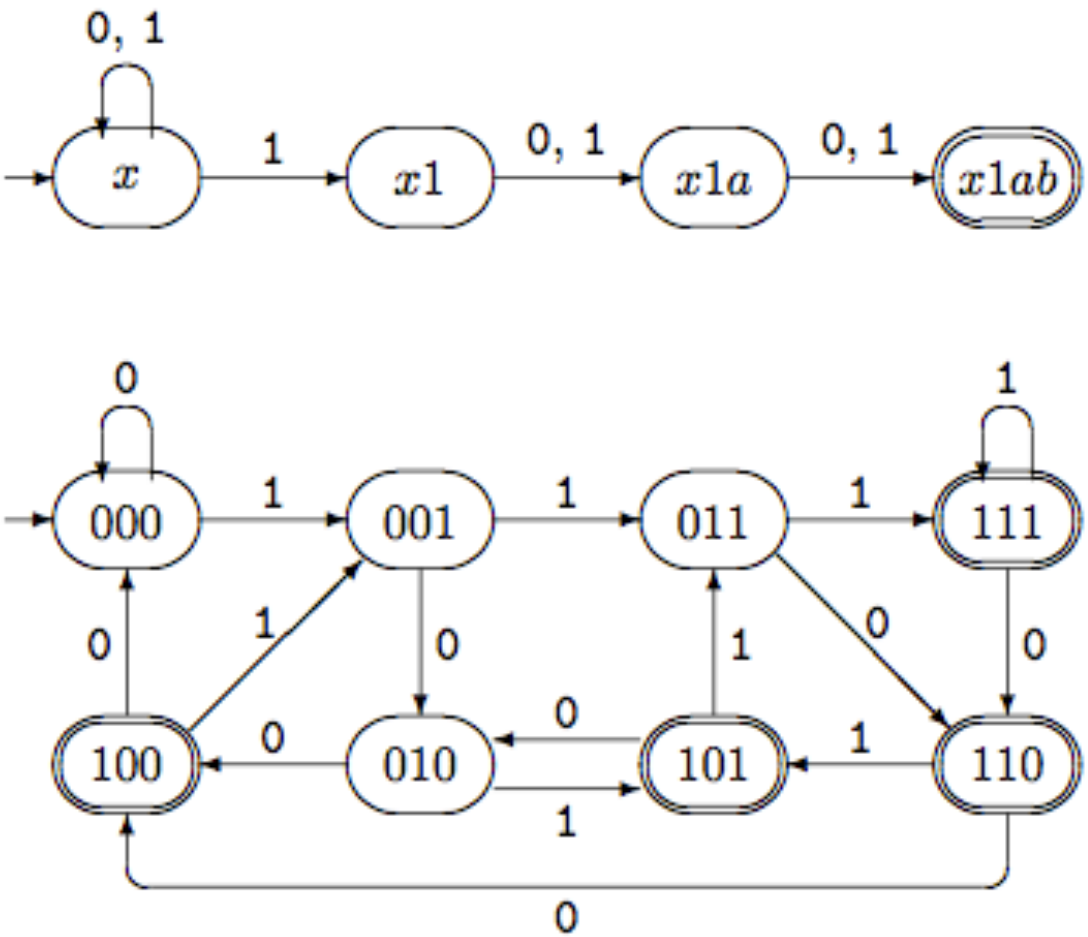
AFN x AFD

- AFN e AFD para a linguagem $L = \{0,1\}^*\{1010\}$

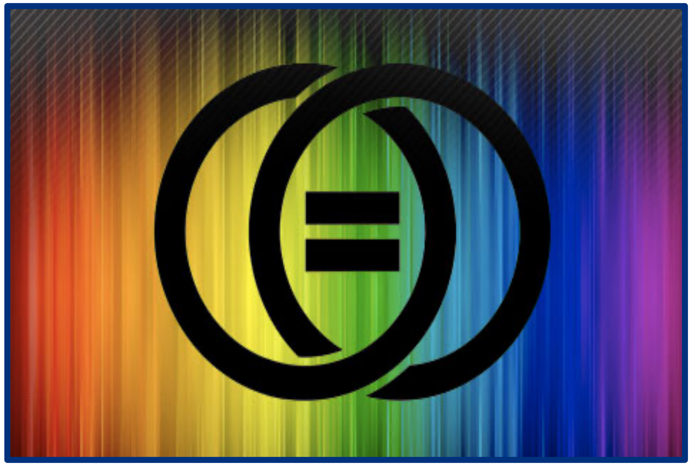


AFN x AFD

- AFN e AFD para a linguagem $L = \{0,1\}^* \{1\}\{0,1\}\{0,1\}$



EQUIVALÊNCIA ENTRE AFNS e AFDS



Equivalência Entre AFNs e AFDs

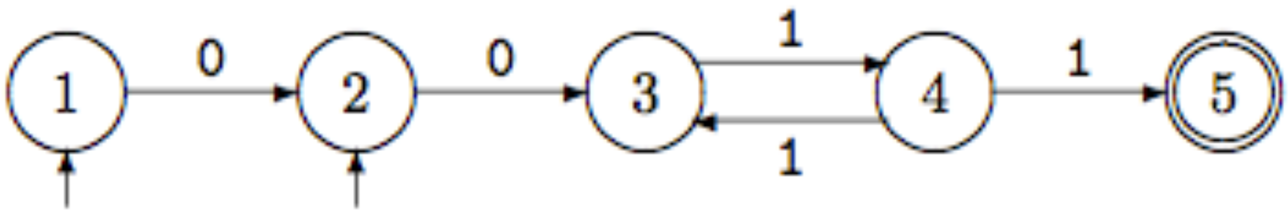
- **Teorema:** para qualquer AFN existe um AFD equivalente

  – A ideia é que um estado será um conjunto, significando todos os estados do AFN atingidos por todas as computações possíveis para a mesma palavra

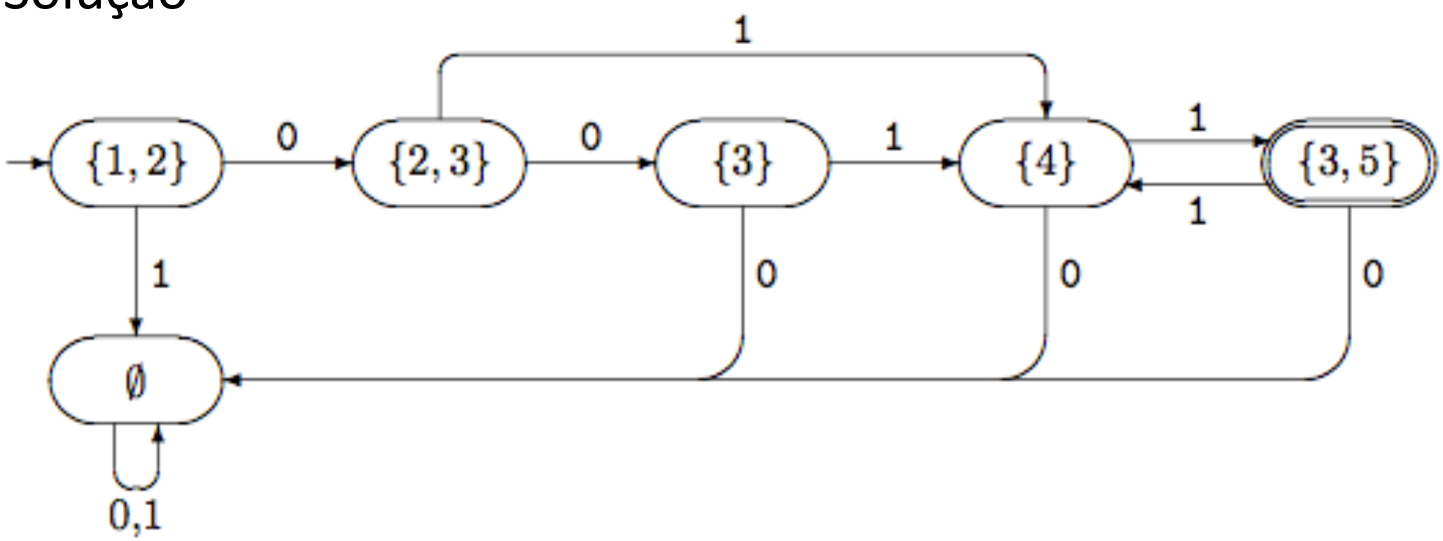
- Seja um AFN $M = (E, \Sigma, \delta, I, F)$, o AFD equivalente é dado por $M' = (\mathrm{P}(E), \Sigma, \delta', I, F')$, onde
  – $\delta'(\phi, a) = \phi, \forall a \in \Sigma^*$
  – $\delta'(X, a) = \bigcup_{e \in X} \delta(e, a), \forall a \in \Sigma, X \subseteq E$
  – $F' = \{X \subseteq E \mid X \cap F \neq \varnothing\}$

Equivalência Entre AFNs e AFDs

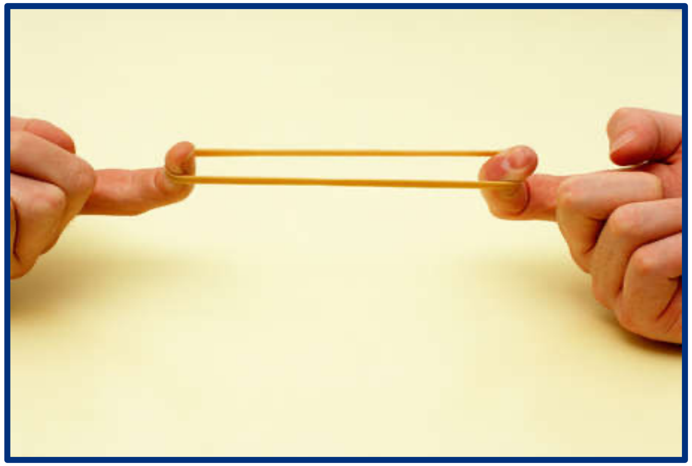
- Obtenha o diagrama de estados do AFD equivalente ao AFN dado a seguir



- Solução



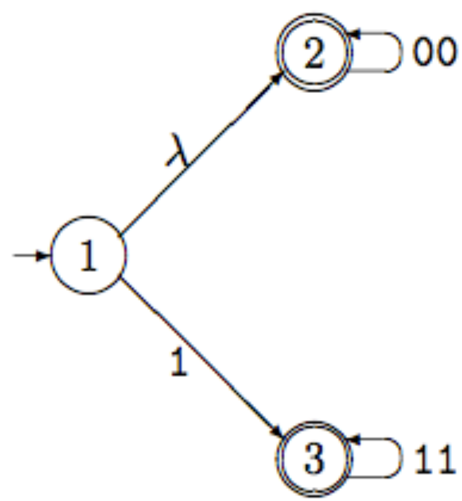
AFN ESTENDIDO



AFN Estendido

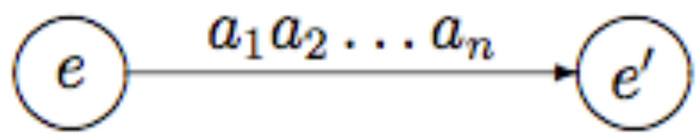
- Um AFN **estendido** é uma quíntupla $(E, \Sigma, \delta, I, F)$, em que
  - E, Σ, I, F são como em AFNs
  - δ é uma função parcial $E \times D \rightarrow P(E)$, em que D é algum subconjunto finito de Σ^*

- Exemplo: AFNE para $\{w \in \{0\}^* \mid |w| \text{ é par}\} \cup \{w \in \{1\}^* \mid |w| \text{ é ímpar}\}$

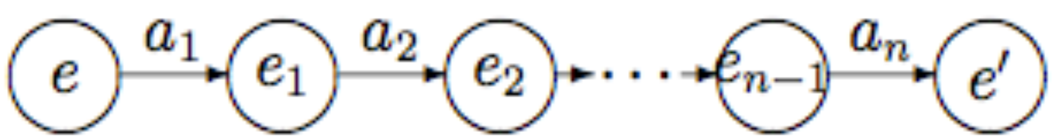


AFN Estendido

- Uma transição da forma



pode ser substituída por n transições



AFN λ

- Um autômato finito não determinístico com transições λ (AFN λ) é uma quíntupla $M = (E, \Sigma, \delta, I, F)$, onde
  - E, Σ, I, F são como em AFNs
  - δ é uma função total $E \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \rightarrow P(E)$

- A função **fecho** λ para M, $f\lambda$: $P(E) \rightarrow P(E)$, é definida recursivamente como ($X \subseteq E$):
  a) $X \subseteq f\lambda(X)$
  b) se $e \in f\lambda(X)$, então $\delta(e, \lambda) \subseteq f\lambda(X)$

AFN λ

- A **função de transição estendida** para um AFN λ $M = (E, \Sigma, \delta, I, F)$, $\delta : \mathrm{P}(E) \times \Sigma^* \rightarrow P(E)$ é definida recursivamente como segue

  a) $\hat{\delta}(\phi, w) = \phi, \forall w \in \Sigma^*$

  b) $\hat{\delta}(A, \lambda) = f\lambda(A), \forall A \subseteq E$

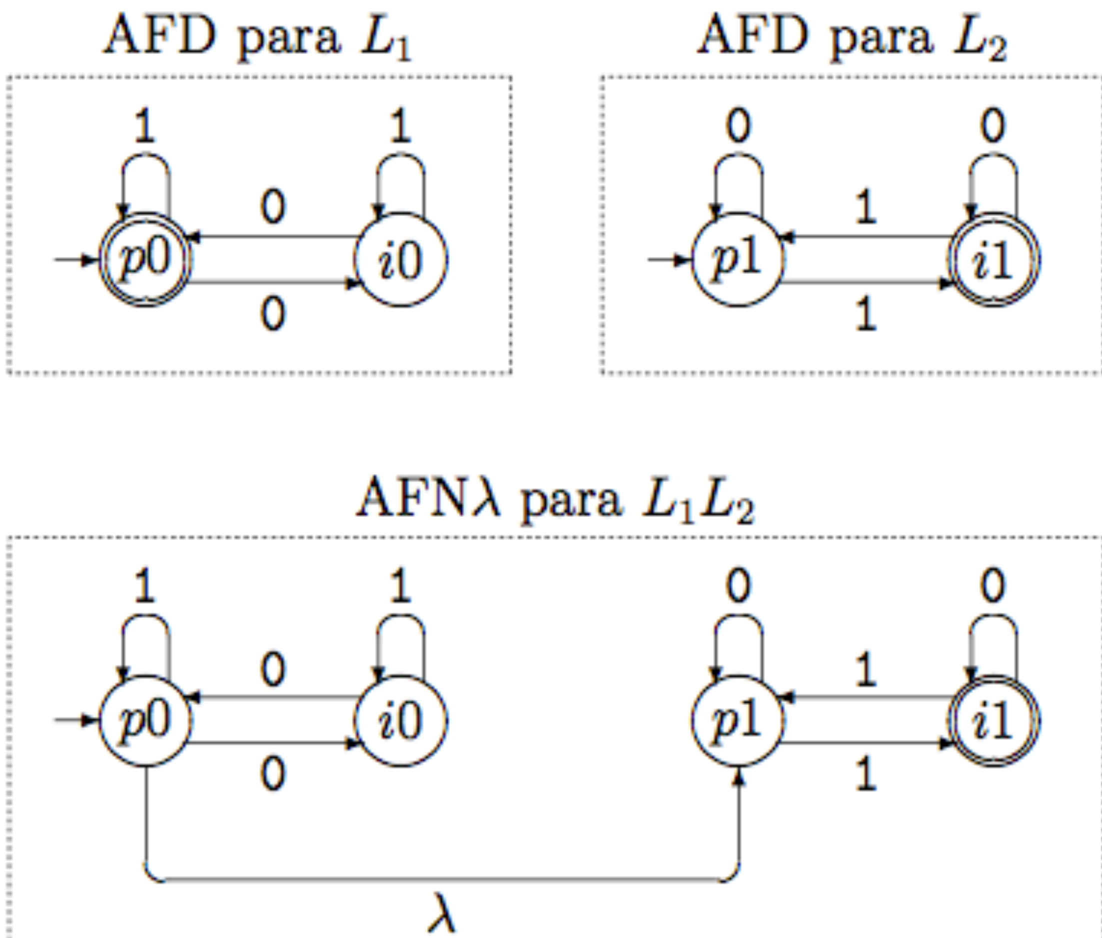
  c) $\hat{\delta}(A, ay) = \hat{\delta}(\bigcup_{e \in f\lambda(A)} \delta(e, a), y), \forall A \subseteq E, a \in \Sigma, y \in \Sigma^*$

- A linguagem reconhecida por um AFN λ é dada por

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(I, w) \cap F \neq \phi\}$$

AFN λ

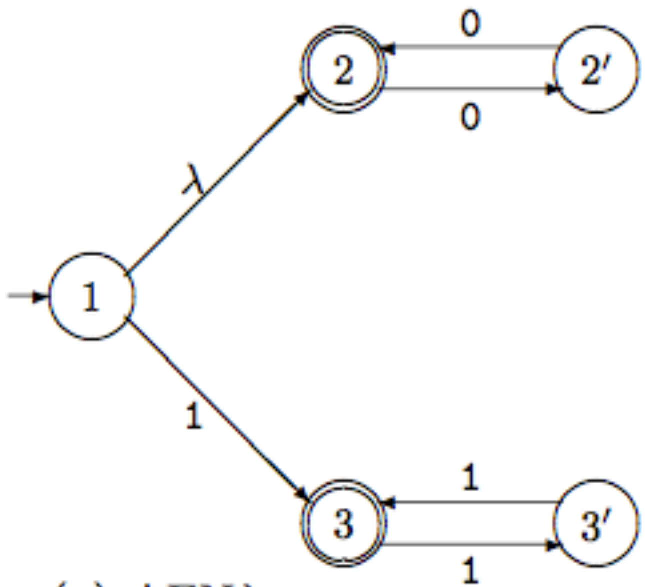
- Exemplo de AFN λ



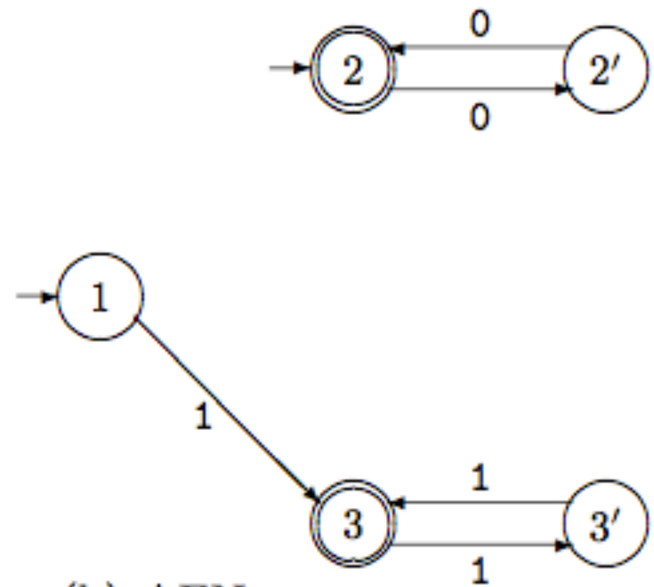
Equivalência entre AFN λ e AFN

- Seja um AFN λ $M = (E, \Sigma, \delta, I, F)$, o AFN equivalente é dado por $M' = (E, \Sigma, \delta', I', F)$, onde
  - $I' = f\lambda(I)$
  - $\delta'(e,a) = f\lambda(\delta(e,a)), \forall e \in E, a \in \Sigma$

- Exemplo



(a) AFNλ

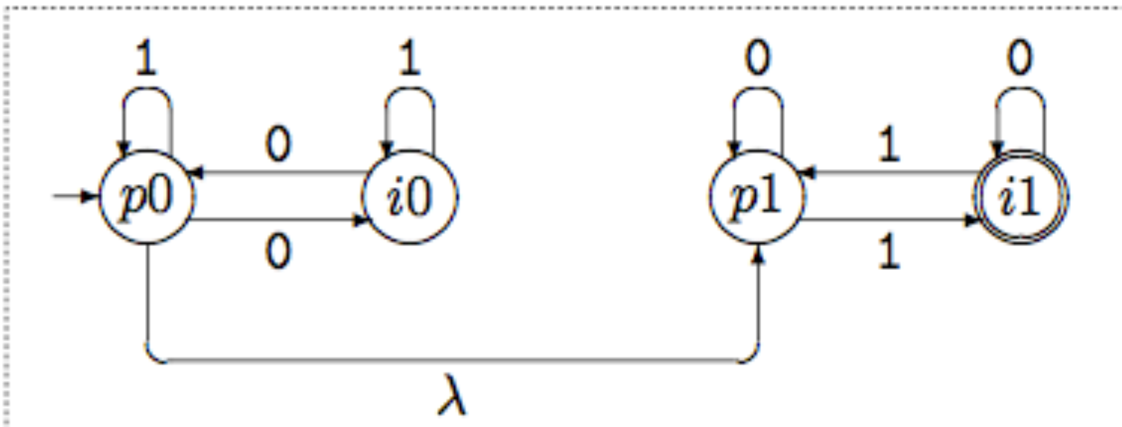


(b) AFN

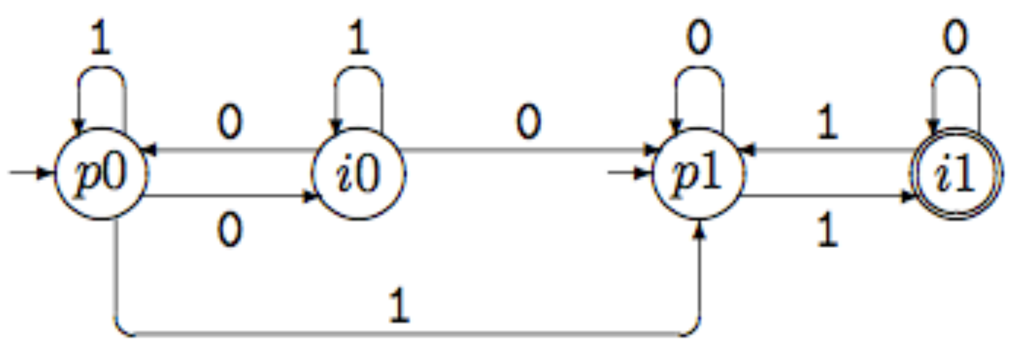
Equivalência entre AFN λ e AFN

- Outro exemplo

AFNλ para L_1L_2

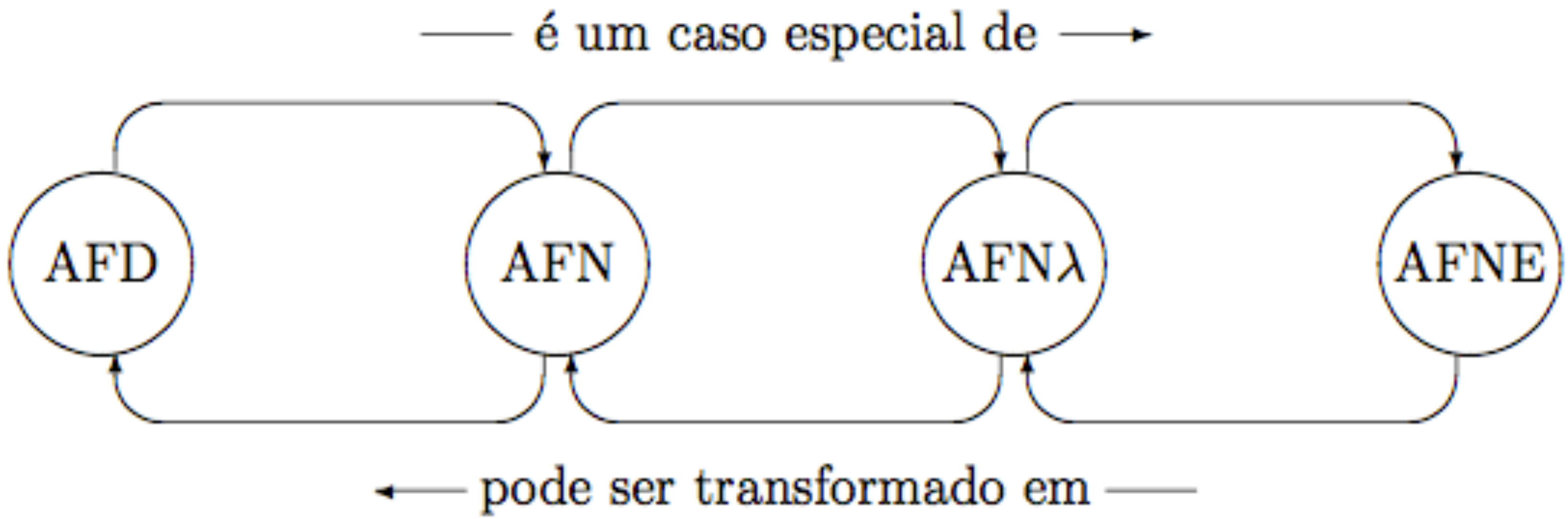


AFN para L_1L_2



Relação Entre Autômatos Finitos

- O diagrama abaixo ilustra a relação entre autômatos finitos



ISSO É TUDO, PESSOAL!