CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

Linguagens Formais e Autômatos

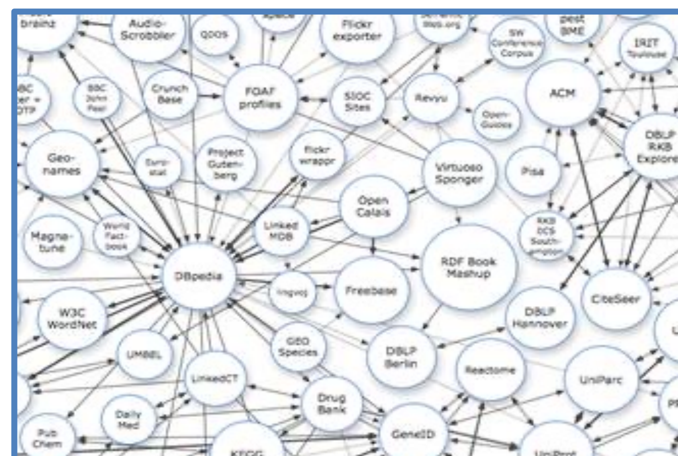
Conceitos Preliminares

Andrei Rimsa Álvares
andrei@cefetmg.br

Sumário

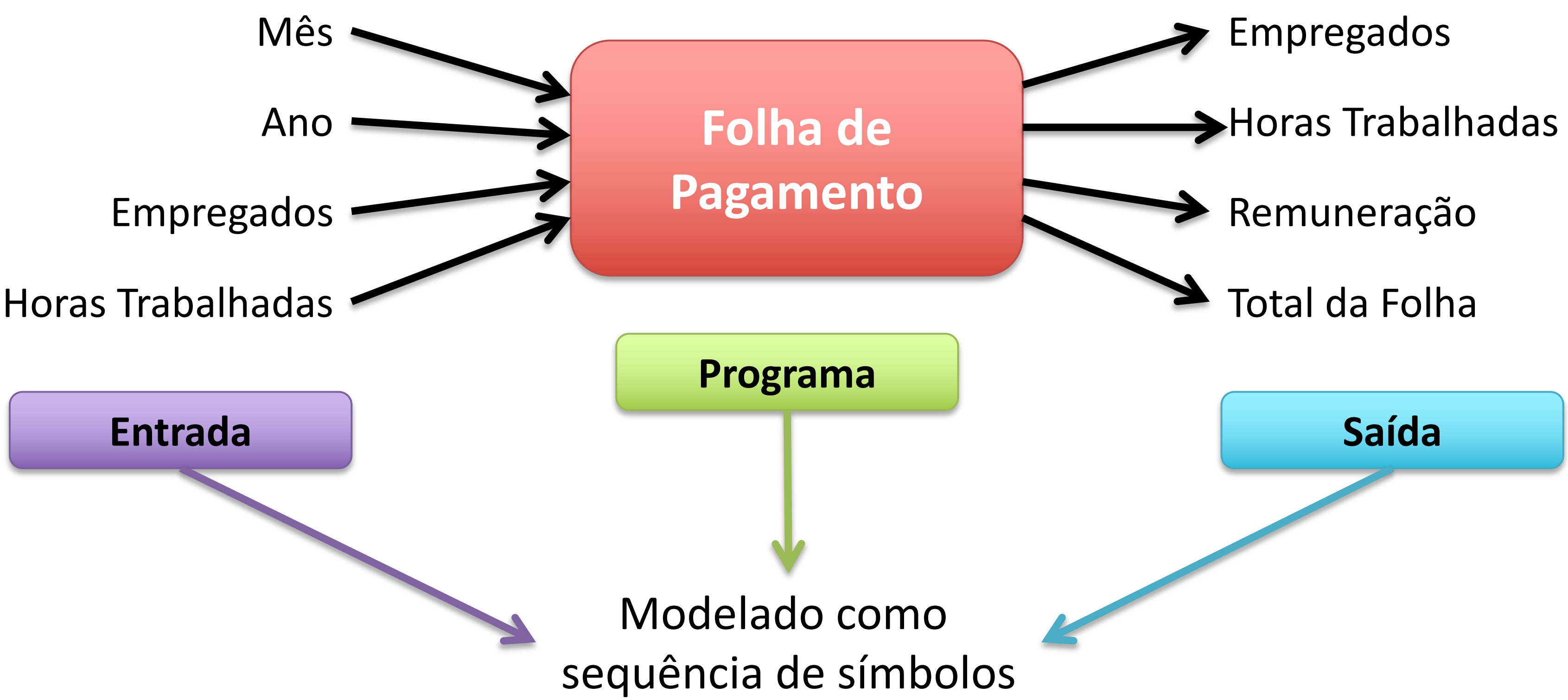
- Representação
- Prova de Teoremas
- Conjuntos
- Relações
- Funções
- Conjuntos Enumeráveis
- Definições Recursivas
- Indução Matemática
- Grafos
- Linguagens Formais
- Gramáticas
- Problemas de Decisão

REPRESENTAÇÃO



Representação

- Para resolver um problema computacional, deve-se **representar** as entidades envolvidas
  - Constituída por uma sequência de símbolos



Representação

- É útil considerar entre a entidade representada e a sequência de símbolos que a representa, um terceiro elemento: o **modelo matemático**

Entidade	*Modelo matemático*	*Representação*
mês	número inteiro no intervalo $[1, 12]$	um dos caracteres 1, 2, 3 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, A ou B
remuneração	número real positivo	número real na base 10
presença	vetor de números, um para cada dia do mês	sequência de números reais na base 10
FP	relação	tabela de sequências de símbolos c/ nome, salário, etc.
cálculo de FP	algoritmo	programa

PROVA DE TEOREMAS

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

proof from book:

$$(f+g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$

$$\rightarrow = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$\rightarrow = \lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]$$

how does this happen

$$\rightarrow = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\rightarrow = f'(x) + g'(x)$$

why isn't

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

zero? $f(x) - f(x)$?

Prova de Teoremas

- O objetivo de uma prova é mostrar, sem deixar margens de dúvida, que determinada afirmativa é verdadeira
- Uma prova pode ser direcionada para o tipo de leitor para o qual ela é construída

Prova Formal

Alvo: Computadores

- Explicitar todas as hipóteses
- Definir todos os passos de inferência
- Em geral, grande e ilegível

Prova Concisa

Alvo: Especialistas

- Pode fazer referência a resultados conhecidos, sem prová-los novamente
- A prova é informal, mas assegura certo rigor e relativa clareza

Prova de Teoremas

- Em síntese, quando se escreve uma prova para pessoas lerem, ela deve ser informal, e seu estilo e detalhe devem depender da audiência intencionada

- Normalmente expressa em língua natural (no nosso caso português) intercalada com algum formalismo matemático
  - Contudo, o vocabulário empregado é normalmente limitado para evitar ambiguidades

- Algumas palavras e expressões que ocorrem com frequência possuem um significado padrão
  - Exemplos: **se...então**, **contradição**, **portanto**...

Prova de Teoremas

- Dentre os termos utilizados em provas, destacam-se aqueles para os **conectivos lógicos**
  - **Negação**: ¬ (*não*)
  - **Conjunção**: ∧ (*e*)
  - **Disjunção**: ∨ (*ou*)
  - **Condicional**: → (*se...então*)
  - **Bicondicional**: ↔ (*se e somente se*)
  - **Quant. Universal**: ∀ (*para todo*)
  - **Quant. Existencial**: ∃ (*existe*)

Negação

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

Conjunção

α	β	$\alpha \wedge \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

α	β	$\alpha \vee \beta$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Prova de Teoremas

- Sejam as seguintes afirmativas:
  - $0 > 1$ → **F**
  - 2 é um número par → **V**
  - 2 é um número primo → **V**
  - todo número é um quadrado perfeito → **F**

- Responda para as seguintes afirmativas se são verdadeiras ou falsas
  - 2 é um número par $\land$ 2 é um número primo
  - $(0 > 1) \land$ 2 é um número primo
  - $(0 > 1) \lor$ 2 é um número primo
  - 2 é um número par $\rightarrow$ todo número é um quadrado perfeito

Prova de Teoremas

- **Afirmativa válida**: Verdadeira para todos os valores-verdade de suas subafirmativas
  - Exemplos
    - $\alpha \lor \neg\alpha$
    - $\alpha \rightarrow \alpha$
    - $\alpha \lor (\alpha \rightarrow \beta)$
    - $P(a) \rightarrow \exists x P(x)$
    - $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg\exists x \neg P(x)$

Prova de Teoremas

- **Contradição**: Falsa para todos os valores-verdade de suas subafirmativas

  - Exemplos
    - $\alpha \land \neg\alpha$
    - $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$
    - $(\alpha \land (\alpha \rightarrow \beta)) \land \neg\beta$
    - $P(a) \land \neg\exists x P(x)$
    - $\forall x P(x) \land \exists x \neg P(x)$

Prova de Teoremas

- **Equivalência lógica**: $\alpha \equiv \beta$ se o valor-verdade de α e β é o mesmo para todos os valores-verdade de suas subafirmativas

  - Exemplos
    - $\alpha \lor \beta \equiv \beta \lor \alpha$
    - $\alpha \lor (\beta \land \gamma) \equiv (\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma)$
    - $\neg(\alpha \land \beta) \equiv \neg\alpha \lor \neg\beta$
    - $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \lor \beta$
    - $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha)$
    - $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Prova de Teoremas

- **Regras de Inferência**
  - Exemplos

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta} \qquad \frac{\alpha \quad \neg\alpha \vee \beta}{\beta} \qquad \frac{\neg\beta \quad \alpha \rightarrow \beta}{\neg\alpha}$$

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \neg\alpha \rightarrow \beta}{\beta} \qquad \frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma} \qquad \frac{\alpha \leftrightarrow \beta \quad \beta \leftrightarrow \gamma}{\alpha \leftrightarrow \gamma}$$

Relação entre $\Rightarrow$ e $\rightarrow$:

Se $\Gamma \cup \{\alpha\} \Rightarrow \beta$, então $\Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta$

Técnicas de Prova

- Algumas técnicas de prova:

1) Direta
2) Pela contrapositiva
3) Para a universal
4) Por contradição
5) Por construção
6) Por análise de casos
7) Para bicondicional

Técnicas de Prova (1)

- Prova **direta**

Prova direta
Para provar $\alpha \rightarrow \beta$: 1) Supor α 2) Provar β

  - Exemplo
    - n é par $\rightarrow n^2$ é par

Prova: Suponha que n é um natural par. Neste caso, $n = 2k$ para algum número natural k, e $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Logo, n^2 é par. Conclui-se que, se n é um natural par, então n^2 é par.

Técnicas de Prova (2)

- Prova **pela contrapositiva**

Prova pela contrapositiva
Para provar $\alpha \rightarrow \beta$: 1) Supor $\neg\beta$ 2) Provar $\neg\alpha$

  - Exemplo
    - n^2 não é par $\rightarrow$ n não é par

Prova: No exemplo anterior foi utilizado implicitamente um resultado relativo ao quantificador universal. Tal resultado é: se $\Gamma \Rightarrow \mathrm{P}(a)$ e a não ocorre em Γ, então $\Gamma \Rightarrow \forall x \mathrm{P}(x)$.

Técnicas de Prova (3)

- Prova **para a universal**

Prova para a universal
Para provar $\forall x P(x)$: 1) Supor um x arbitrário (que não ocorreu ainda) 2) Provar $P(x)$

  - Exemplo
    - $\forall n \in N$ (n é par $\rightarrow n^2$ é par)

Prova: Seja n um número natural arbitrário. Suponha que n é par. Neste caso, $n = 2k$ para algum número natural k, e $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Logo, se n é par, n^2 é par. E como n é um natural arbitrário, conclui-se que $\forall n \in N$ se n é par, então n^2 é par.

Técnicas de Prova (4)

- Prova **por contradição**

Prova por contradição
Para provar α: 1) Supor $\neg\alpha$ 2) Provar uma contradição

  - Exemplo
    - Existe uma infinidade de números primos

Prova: Suponha que existe uma quantidade limitada de números primos p_1, p_2, ..., p_n, para algum natural n. Seja o número $k = (p_1 p_2 \cdots p_n) + 1$. Ora, tal número não é divisível por nenhum dos números primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Logo, k é divisível por algum outro primo diferente de p_1, p_2, ..., p_n ou então k é primo. Em qualquer destes dois casos, tem-se a existência de um primo diferente de p_1, p_2, ..., e p_n. Isto contradiz a suposição original de que existe uma quantidade limitada de números primos. Logo, existe uma infinidade de números primos.

Técnicas de Prova (5)

- Prova **por construção**

Prova por construção
Para provar $\exists x \in A P(x)$: 1) Encontrar um $a \in A$ tal que $P(a)$ 2) Provar $P(a)$

  - Exemplo
    - $\forall n \in N$, $\exists k \in N$, tal que n tem k divisores distintos

Prova: Seja um número natural arbitrário n. Pelo resultado do exemplo anterior, existem n primos p_1, p_2, ..., p_n. Ora, um número natural com n divisores distintos seria $p_1 p_2 ... p_n$.

Técnicas de Prova (6)

- Prova **por análise de casos**

Prova por análise de casos
Para provar β: 1) Provar $\alpha_1 \lor \alpha_2 \lor \ldots \lor \alpha_n$ 2) Provar $\alpha_1 \rightarrow \beta, \ldots, \alpha_n \rightarrow \beta$

  - Exemplo
    - $\forall x,y \in R$, $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$

Prova: Sejam x e y dois números reais arbitrários. Serão considerados cada um destes três casos.

- Para $\boldsymbol{x < y}$: $\min(x, y) = x$ e $\max(x, y) = y$.
- Para $\boldsymbol{x = y}$: $\min(x, y) = \max(x, y) = x = y$.
- Para $\boldsymbol{x > y}$: $\min(x, y) = y$ e $\max(x,y) = x$.

Em qualquer um dos três casos, $\min(x, y) + \max(x,y) = x + y$. Portanto, $\min(x,y) + \max(x,y) = x + y$ para quaisquer números reais x e y.

Técnicas de Prova (7)

- Prova **para a bicondicional**

Prova para a bicondicional
Para provar $\alpha \leftrightarrow \beta$: 1) Provar $\alpha \rightarrow \beta$ 2) Provar $\beta \rightarrow \alpha$

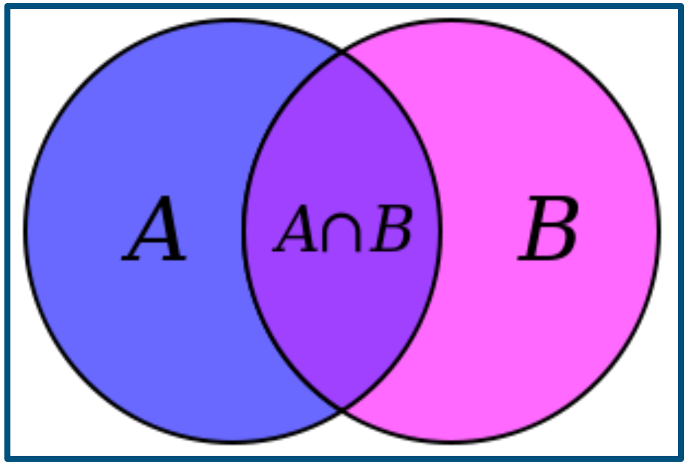
  – Exemplo
    - $\forall n \in N$ (n é par $\rightarrow n^2$ é par)

Prova:

(→) Suponha que n é par. Neste caso, $n = 2k$ para algum número natural k, e $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Logo, se n é par, n^2 é par.

(←) A prova será feita pela contrapositiva. Para isto, suponha que n é ímpar. Neste caso, $n = 2k+1$ para algum número natural k, e $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$. Logo, se n é ímpar, n^2 é ímpar.

CONJUNTOS



Conjuntos

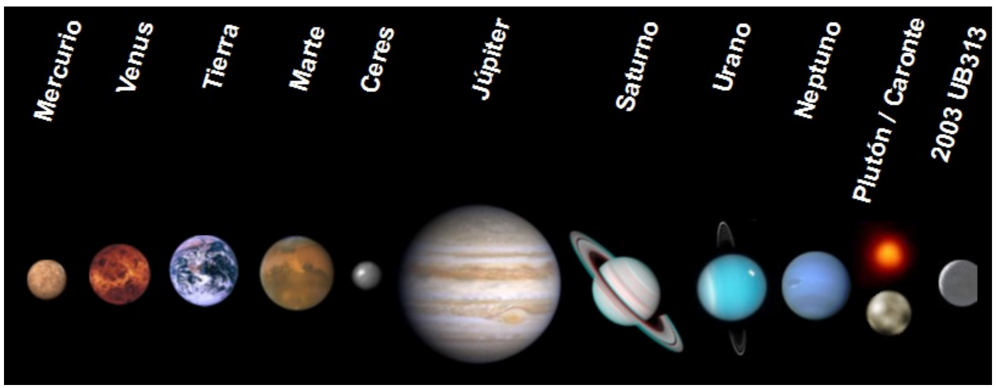
- Abstração matemática que captura o conceito de uma coleção de objetos

Objetos de um conjunto são chamados de **elementos** ou **membros**

  - Notação
    - $a \in A$: objeto a **pertence** a A
    - $a \notin A$: objeto a **não pertence** a A

Conjuntos

- Exemplos
  - Conjunto de objetos homogêneos



{ mercúrio, vênus, terra, marte, júpiter, saturno, urano, netuno, plutão }

  - Conjunto de números, planetas e conjuntos

{ 10, marte, {0}, {terra, 1, 2, 3} }

  - Equivalência de conjuntos

{ 1, 2 } = { 2, 1 } = { 1, 2, 1 } = { 2, 1 + 1, 2 – 1, |sqrt(4)| }

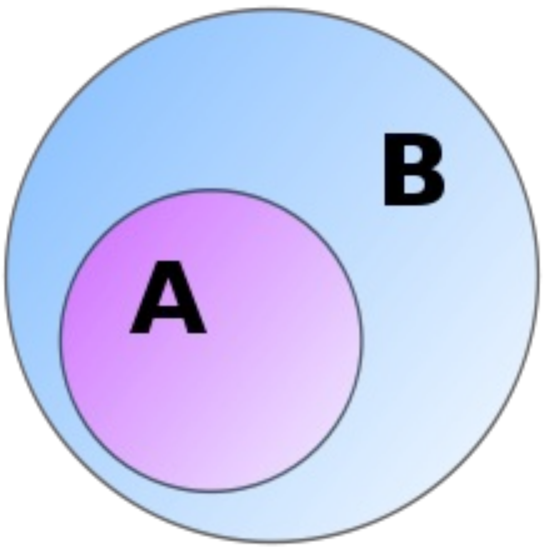
Conjuntos

- Tipos de conjuntos
  - Conjunto **vazio** ($\emptyset$)
  - Conjuntos **unitários**, **finitos**, **infinitos**
  - Conjunto dos números **naturais** ($\mathbb{N}$)
  - Conjunto dos números **inteiros** ($\mathbb{Z}$)
  - Conjunto dos números **reais** ($\mathbb{R}$)
  - Conjunto dos números **racionais** ($\mathbb{Q}$)

- Notações importantes
  - $\{ x \mid P(x) \}$ ⇨ $\{ k \mid k = 2n + 1 \text{ e } n \in N \}$
  - $\{ x \in A \mid P(x) \}$ ⇨ $\{ k \in R \mid 0 \leq k \leq 1 \}$

Conjuntos

- Relações entre conjuntos



  - **Subconjunto**

    $A \subseteq B$ se e somente se $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

  - **Subconjunto próprio**

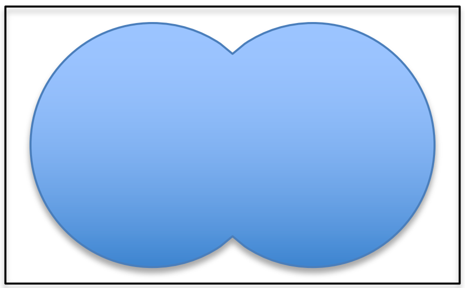
    $A \subset B$ se e somente se $A \subseteq B$ e $A \neq B$

  - Exemplos
    - $\emptyset \subseteq A$
    - $\emptyset \subset A$ e $A \neq \emptyset$
    - $\emptyset \not\subset \emptyset$

Conjuntos

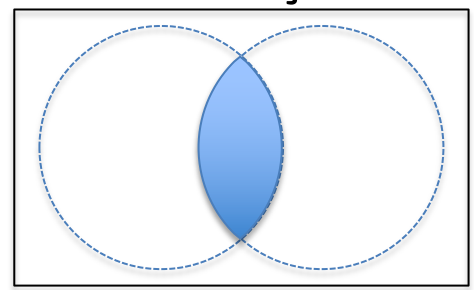
- Operações sobre conjuntos

União



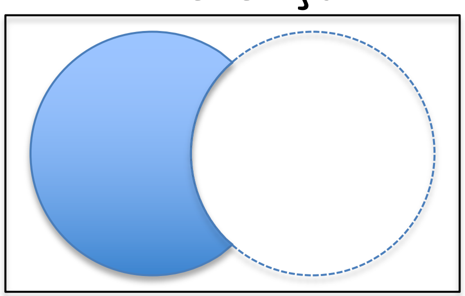
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Interseção



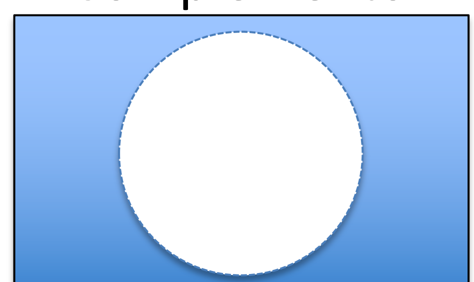
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Diferença



$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Complemento



$$\overline{A} = U - A$$

Conjuntos

- Conjuntos identidade
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  - $A - B = A \cap \overline{B}$

Conjuntos

- **Igualdade de conjuntos**

$$A = B \text{ se e somente se } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$$

  - Exemplo
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- **Conjuntos disjuntos**

A e B são disjuntos se e somente se A ∩ B = ∅

  - Exemplos
    - { 0, 2, 4 } e { 1, 3, 5 }
    - ∅ e A
    - A e $\overline{A}$
    - $A - B$ e $B - A$

Conjuntos

- **União** de *n* conjuntos

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

- **Interseção** de *n* conjuntos

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

- **Partição**

Partição de um conjunto

Uma partição de A é o conjunto $\{B_1, ..., B_n\}$ tal que:

1) $B_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq n$
2) $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $1 \leq i < j \leq n$
3) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = A$

Conjuntos

- **Conjunto potência** de A

$$P(A) = \{\ X \mid X \subseteq A\ \}$$

  - Exemplo
    - Qual o conjunto $P(\{1,2,3\})$?

- Notação para **número de elementos** de A

$$|A|$$

  - Exemplos
    - $|\emptyset| = 0$
    - $|\{\emptyset,1,2,\{1,2,3,4,5\}\}| = 4$
    - $|P(A)| = 2^{|A|}$

Conjuntos

- **Produto cartesiano** de dois conjuntos

$$A \times B = \{\ (a,b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\ \}$$

  - Exemplos
    - $\emptyset \times \{1,2\} = \emptyset$
    - $\{1,2\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$
    - $|A \times B| = |A| \bullet |B|$

RELAÇÕES

Relações

- Uma relação de *n* argumentos sobre os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_N$ é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N$
  - Relações de **dois argumentos** são **relações binárias**
  - Relações de **três argumentos** são **relações ternárias**
  - e assim por diante

- Exemplos
  - Relação binária: $< \subseteq N \times N$
    - Domínio: N
    - Contradomínio: N
    - Imagem: $N - \{0\}$
  - Relação binária: $R \subseteq A \times B$
    - Domínio: A
    - Contradomínio: B
    - Imagem: $\{ y \mid (x,y) \in R$ para algum $x\}$

Notação: $(x,y) \in R$ é o mesmo que xRy

Relações

- Propriedades de uma relação binária
  - **Reflexiva:** $\forall x \in A\ [xRx]$
  - **Simétrica:** $\forall x, y \in A\ [(xRy \rightarrow yRx)]$
  - **Transitiva:** $\forall x, y, z \in A\ [(xRy \text{ e } yRz) \rightarrow xRz]$

- As relações abaixo são reflexivas, simétricas e/ou transitivas?
  1) $<$ sobre N
  2) $\leq$ sobre N
  3) $\subseteq$ sobre $P(N)$

Como é a relação **é irmão de**?

Relações

- A relação **é irmão de** sobre o conjunto de pessoas do mundo

  – **Não é reflexiva:** uma pessoa não é irmã de si mesma
  – **É simétrica:** se fulano é irmão de beltrano, então beltrano é irmão de fulano
  – **Não é transitiva:** quando fulano é irmão de beltrano, beltrano é irmão de fulano (simetria), mas fulano não é irmão de fulano

Relações

- Relação de **equivalência** é uma relação binária **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva**
  - Uma relação de equivalência R sobre um conjunto A divide A em classes de equivalência que formam uma partição do conjunto A

- Exemplos
  - $(\text{mod } n) = \{ (x,y) \in N^2 \mid x \text{ mod } n = y \text{ mod } n \}$
  - $\mathrm{A} = \{ (\mathrm{p},\mathrm{q}) \in \mathrm{P} \mid \mathrm{p}$ e q fazem aniversário no mesmo dia }

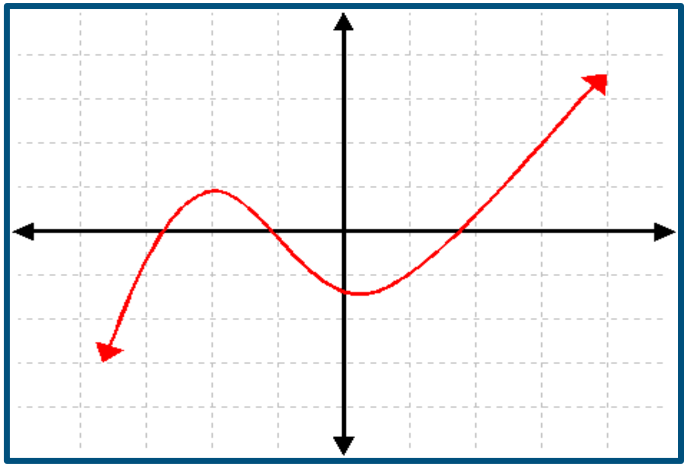
Relações

- O **fecho reflexivo** de uma relação $R \subseteq A \times A$ é a relação S tal que:
  - $R \subseteq S$
  - S é reflexiva
  - se $R \subseteq T$ e T é reflexiva, $S \subseteq T$

Os **fechos simétricos** e **transitivos** são análogos ao fecho reflexivo

- Qual o fecho
  - **reflexivo** de $<$?
  - **simétrico** de $<$?

FUNÇÕES



Funções

- Uma função **parcial** $f : A \rightarrow B$ é uma relação binária $f \subseteq A \times B$ tal que:
  - se $(x,y) \in f$ e $(x,z) \in f$, então $y = z$

Notação comum: $(x,y) \in f$ é o mesmo que $f(x) = y$

Funções

- Tipos de funções
  - **Função indefinida:** se não existe y tal que $f(x) = y$
  - **Função total:** se para todo $x \in A$ existe $f(x) = y$; ou seja, uma função total $f : A \rightarrow B$ é uma função parcial definida para todo argumento $x \in A$
    - $+ : N \times N \rightarrow N$ (**Função total**)
    - $/ : N \times N \rightarrow N$ (**Função parcial**)
  - **Função de *n* argumentos:**

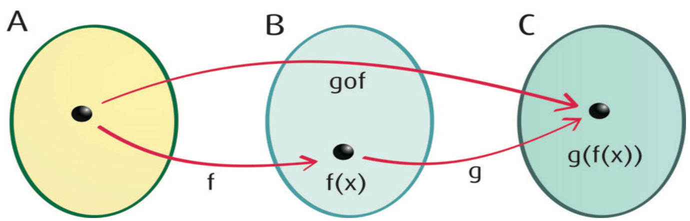
    $f : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \rightarrow \mathrm{B}$

Notação comum: $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Funções

- Sejam duas funções $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$, a composição de g e f é a função $g \; o \; f : A \rightarrow D$ tal que

$$g \;\; o \;\; f(x) = \begin{cases} g(f(x)) & \text{se } f \text{ é definida para } x \text{ e } g \text{ é definida para } f(x) \\ \text{indefinido} & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Funções

- Exemplo de composição de funções
  - Sejam:
    - $f : Z \rightarrow N$ tal que $f(n) = |n| + 1$
    - $g : N \rightarrow Z$ tal que $g(n) = 1 - n$
  - Então:
    - $g \; o \; f : Z \rightarrow Z$

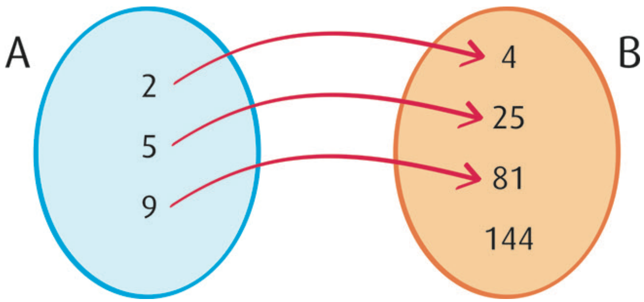
      $(g \; o \; f)(n) = g(f(n)) = g(|n| + 1) = 1 - (|n| + 1) = - |n|$

    - $f \; o \; g : N \rightarrow N$

      $(f \; o \; g)(n) = f(g(n)) = f(1 - \mathrm{n}) = |1 - n| + 1$

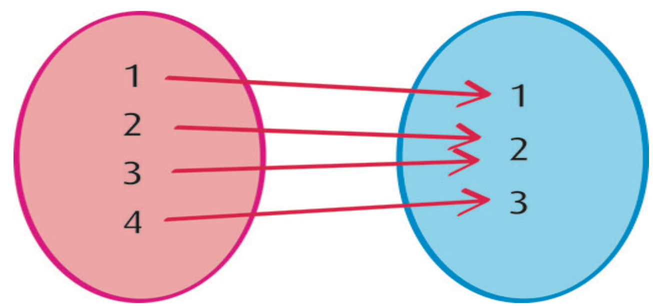
Funções

- Uma função total $f : A \to B$ é



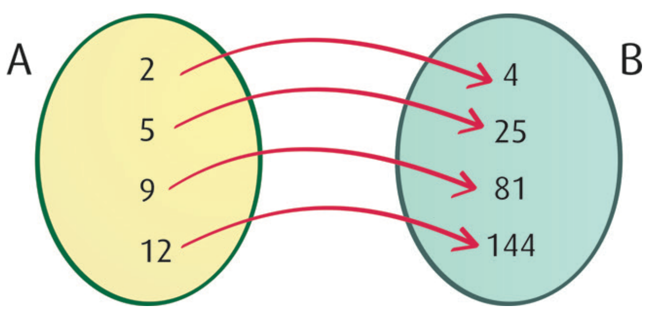
Injetora: se $\forall x, y\ [x \neq y \to f(x) \neq f(y)]$

– Ex.: $f : N \to N$ tal que $f(n) = 2n$



Sobrejetora: se B é a imagem de A

– Ex.: $g : Z \to N$ tal que $g(n) = |n|$

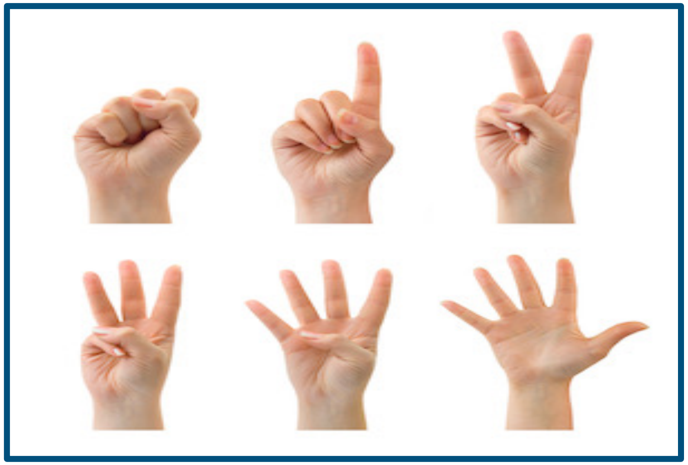


Bijetora: se é injetora e sobrejetora

– Ex.: $f : Z \to N$ tal que

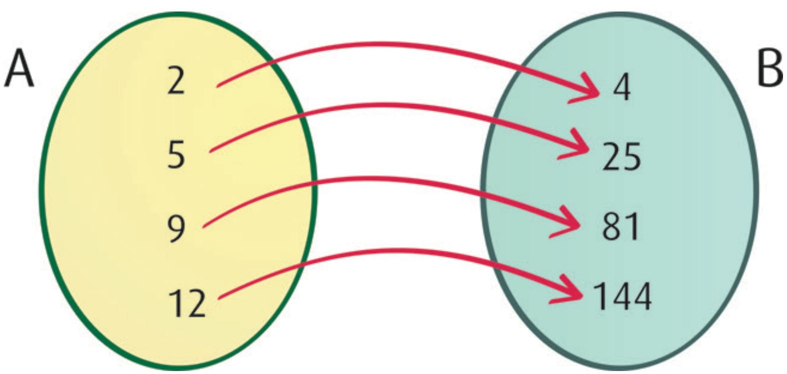
$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{se } n \geq 0 \\ -(2n+1) & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

CONJUNTOS ENUMERÁVEIS



Conjuntos Enumeráveis

- Para determinar se dois conjuntos finitos A e B têm o mesmo tamanho, basta "contar" o número de elementos de cada e verificar se o valor bate



- Uma outra abordagem seria determinar se existe uma função bijetora de A para B (ou vice-versa)

E se o conjunto for infinito?

Conjuntos Enumeráveis

- A noção de "tamanho" dos conjuntos pode ser substituída pela noção de **cardinalidade** que permite uma útil hierarquização dos conjuntos infinitos

O conjunto de métodos é maior que o conjunto de programas?

  - Dois conjuntos têm a mesma cardinalidade $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ se existe uma função bijetora de A para B
    - Para conjuntos finitos: $\mathrm{card}(A) = |A|$

Conjuntos Enumeráveis

- O conjunto dos números naturais é infinito
  a. $N - \{0\} \subset N$
  b. $f: N \rightarrow N - \{0\}$ tal que $f(x) = x + 1$ é uma função bijetora

- Considere um outro conjunto infinito dos números naturais pares P
  - Faz sentido dizer que $N > P$ já que N possui todos os elementos de P mais os elementos ímpares
  - Contudo, existe uma função bijetora $f: N \rightarrow P$, onde $f(x) = 2x$

Como a cardinalidade dos dois conjuntos é a mesma, eles são equivalentes

Conjuntos Enumeráveis

- Um conjunto é **enumerável** se tem a mesma cardinalidade do conjunto N
  - Um conjunto é dito **contável** se é finito ou enumerável
  - Caso contrário é um conjunto **incontável**

$$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(N)$$

- Exemplos
  - O conjunto de números naturais pares é enumerável; analogamente o conjunto de números naturais ímpares também é enumerável
  - A função $f: N \rightarrow Z$ aparentemente maior que N tem a mesma cardinalidade de N

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se } x \text{ é par} \\ -(x+1)/2 & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \cdots \end{array}$$

Conjuntos Enumeráveis

- O seguinte teorema pode facilitar a demonstração de que determinados conjuntos são contáveis

Teorema: As seguintes afirmativas são equivalentes

a. O conjunto A é contável
b. Existe uma função injetora de A para N
c. $A = \emptyset$ ou existe uma função sobrejetora de N para A

Conjuntos Enumeráveis

- Exemplo: O conjunto dos racionais positivos (QP) é enumerável

	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	0	1	3	6	10	
1	2	4	7	11		
2	5	8	12			
3	9	13				
4	14					
$\vdots$						

Todos os números naturais

Função: $g : N \rightarrow QP$

$$g(k) = i / j$$

Coluna

Linha

Valor

$$f(i, j) = (i + j)(i + j - 1) / 2 + i$$

É bijetora, portanto QP é enumerável

Conjuntos Enumeráveis

- Além do teorema anterior, os seguintes resultados também podem ser úteis para determinar se um conjunto é ou não é contável

Sejam A e B conjuntos contáveis:

a. Para todo C tal que $C \subset A$, C é contável

b. $A \times B$ é contável

c. $A \cup B$ é contável

E como são formados os conjuntos incontáveis?

Conjuntos Enumeráveis

- Um conjunto **incontável**, em certo sentido, tem tantos elementos que é impossível construir uma função bijetora dos naturais para ele
  - A técnica utilizada na demonstração que um conjunto é incontável é conhecida como **Diagonalização de Cantor**

$$S = \{\, C_0, C_1, C_2 \ldots \}$$

Prova por Contradição

Seja S o conjunto de todos os subconjuntos de N

1) Suponha que S é contável

2) Como S é infinito, suponha a função sobrejetora $f : N \rightarrow S$ tal que $f(i) = C_i$

3) Seja o conjunto X tal que para cada $i,j \in N$, $j \in X \leftrightarrow j \notin C_i$

4) X é então um subconjunto de N e diferente de cada conjunto C_i, portanto a existência da função bijetora é incorreta

$C_i \subset \mathrm{P}(N)$

$i \in \mathbb{N}$

	0	1	2	3	$\cdots$
C_0	$\boxed{\in \text{ ou } \notin}$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	
C_1	$\in$ ou $\notin$	$\boxed{\in \text{ ou } \notin}$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	
C_2	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\boxed{\in \text{ ou } \notin}$	$\in$ ou $\notin$	
C_3	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\boxed{\in \text{ ou } \notin}$	
$\vdots$					

$$(C_i, k) = \begin{cases} \text{"}\in\text{" se } k \in C_i \\ \text{"}\notin\text{" se } k \notin C_i \end{cases}$$

Conjuntos Enumeráveis

- Outro exemplo: o conjunto de todas as funções não é contável

Prova por Contradição

Seja o conjunto F de todas as funções
$f : N \rightarrow N$

1) Suponha que F é enumerável, então as funções podem ser enumeradas em sequência $f_0 f_1 f_2 \ldots$

2) Considere a função $g : N \rightarrow N$ tal que $g(i) = f_i(i) + 1$

3) Mas $\forall i \in N$, $g \neq f_i$, pois g difere de f_i para o argumento i, logo a suposição de que F é enumerável não está correta

	0	1	2	3	$\cdots$
f_0	$\boxed{f_0(0)}$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	
f_1	$f_1(0)$	$\boxed{f_1(1)}$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$\boxed{f_2(2)}$	$f_2(3)$	
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$\boxed{f_3(3)}$	
$\vdots$					

Conjuntos Enumeráveis

- Aplicação de conjuntos enumeráveis: suponha que você está em uma prisão e que o carcereiro lhe propôs o seguinte acordo:

Neste envelope selado está escrito um valor. A cada dia lhe concederei uma e somente uma chance de adivinhar qual valor é este. Quando você acertar, estará livre.

Supondo que tanto você quanto o carcereiro são imortais, qual estratégia permitirá sua liberdade quando o valor *n* no envelope for:

- $n \in N$?
- $n \in Z$?
- $n \in N \times N$?
- $n \in P(Z^+)$, n é finito?

Dica: outra aplicação no paradoxo do hotel infinito de Hilbert: https://youtu.be/Uj3_KqkI9Zo

DEFINIÇÕES RECURSIVAS

Definições Recursivas

- Conjuntos enumeráveis podem ser definidos através de uma **definição recursiva** (ou indutiva)

- Uma definição recursiva especifica como um conjunto contável pode ser gerado a partir de um subconjunto dele aplicando-se determinadas operações um número finito de vezes

- Definição recursiva de um conjunto A tem três partes:
  a) **base:** especificação de um conjunto base $B \subset A$
  b) **passo recursivo:** obter elementos de A a partir de elementos do próprio A
  c) **fechamento:** só pertencem a A os referidos em *a)* e *b)*

Definições Recursivas

- Definição recursiva do conjunto dos números naturais (N)
  a) $0 \in N$
  b) se $\mathrm{n} \in N$ então $\mathrm{succ}(n) \in N$
  c) só pertence a N o número que pode ser obtido de acordo com *a)* e *b)*

- Definição recursiva da função fatorial ($f : N \rightarrow N$)
  a) $fat(0) = 1$
  b) $fat(n) = n \times fat(n - 1)$, para $n \geq 1$

Definições Recursivas

- Definição recursiva da função soma ($+ : N \times N \to N$)
  a) $n + 0 = n$, para todo $n \in N$
  b) $m + succ(n) = succ(m + n)$, para todo $m,n \in N$

- Definição recursiva da linguagem LP da lógica proposicional
  a) cada variável proposicional pertence a LP
  b) se α e β pertencem à LP, então pertencem à LP:
    - $\neg\alpha$
    - $\alpha \wedge \beta$
    - $\alpha \vee \beta$
    - $\alpha \to \beta$
    - $\alpha \leftrightarrow \beta$

INDUÇÃO MATEMÁTICA

Linguagens Formais e Autômatos

Indução Matemática

- O **princípio da indução matemática** será amplamente utilizado para provar resultados durante o curso

- Esse princípio espelha a definição recursiva dos números naturais (N)

Princípio da Indução Matemática

Seja uma propriedade P sobre os números naturais. Então, caso

1) P se verifica para o número 0
2) para um natural n arbitrário, se P se verifica para n, então P se verifica para $n + 1$

pode-se concluir que P se verifica para todo número natural

Conhecida como **Indução Fraca**

Indução Matemática

- Utilizando tal princípio, pode-se provar por indução sobre n que uma propriedade P se verifica para todo número $n \in N$, em três passos:
  a) **base da indução:** provar que P se verifica para 0
  b) **hipótese de indução:** supor que P se verifica para n, onde n é um número natural arbitrário
  c) **passo indutivo:** provar que P se verifica para $n + 1$

- Exemplos
  – $\Sigma_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$
  – $\Sigma_{k=0}^{n} k = n(n+1)/2$
  – $n! > 2^n$, para todo $n \geq 4$

Indução Matemática

- Existe uma versão do princípio de indução, e consequentemente no formato da prova, que pode ser mais fácil/conveniente de ser usada em algumas circunstâncias

Princípio da Indução Matemática
Seja uma propriedade P sobre os números naturais. Então, caso • para um natural n arbitrário, se P se verifica para todo $k < n$, então P se verifica para n pode-se concluir que P se verifica para todo número natural

Conhecida como **Indução Forte**

Indução Matemática

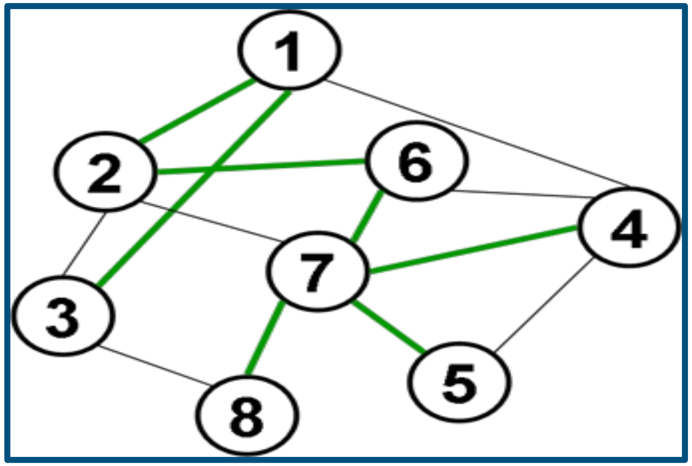
- Uma prova por indução baseada no princípio de indução forte teria os seguintes passos
  a) **hipótese de indução:** supor que P se verifica para todo $k < n$, onde n é um número natural arbitrário
  b) **passo indutivo:** provar que P se verifica para n

- Exemplo
  – Seja a seguinte função:

$$F(0) = 1$$
$$F(n) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} F(i) \right) + 1$$

  – Mostrar que $F(n) = 2^n$

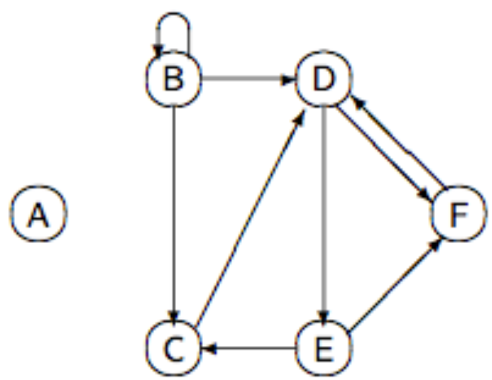
GRAFOS



Grafos

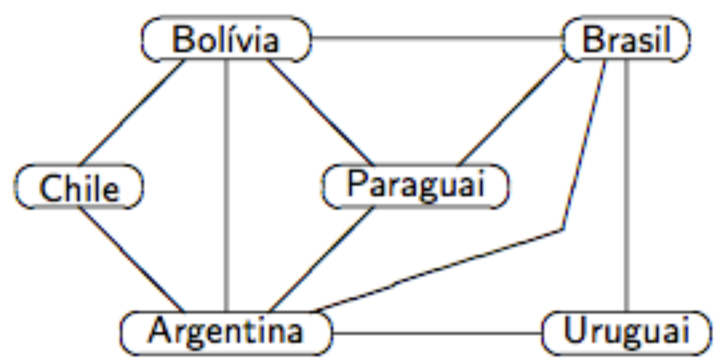
- Um grafo é um par $G = (V,\ A)$
  - V é um conjunto de **vértices**; e
  - A é um conjunto de **arestas**

- Um grafo pode ser **dirigido** ou **não dirigido**



- **Grafo dirigido:** arestas são pares ordenados
  - **Vértices:** {A, B, C, D, E, F}
  - **Arestas:** {(B,B), (B,C), (B,D), (D,E), ...}

- **Grafo não dirigido:** arestas são pares não ordenados
  - **Vértices:** {Brasil, Bolívia, ...}
  - **Arestas:** {(Bolívia, Chile), ...}

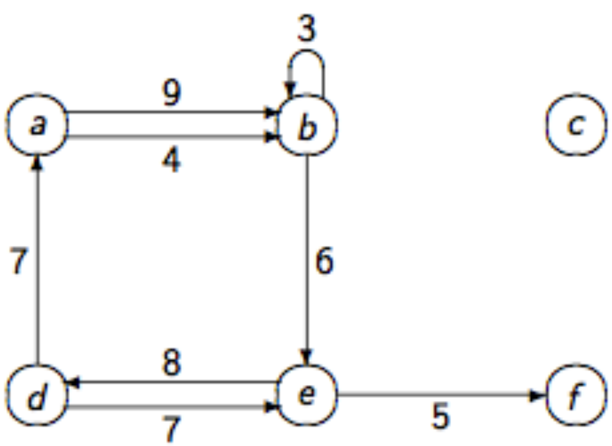


Grafos

- Um grafo pode ter **rótulos** associados às suas arestas e/ou vértices

- Um grafo dirigido rotulado é uma tripla $G = (V,\ A, R)$
  - V é um conjunto de **vértices**; e
  - A é um conjunto de **arestas rotuladas**; e
  - R é um conjunto de **rótulos**

Grafo não dirigido rotulado é análogo



- **Grafo dirigido rotulado:**
  - **Vértices:** $\{a, b, c, d, e, f\}$
  - **Arestas:** $\{(a,b,4), (a,b,9), (b,b,3), ...\}$
  - **Rótulos:** $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Grafos

- Alguns conceitos importantes de grafos
  - **Grau de um vértice:** número de arestas incidentes ao vértice
    - **Grau de entrada:** número de arestas entrando em um vértice
    - **Grau de saída:** número de arestas saindo de um vértice

  - **Caminho de a para b:** sequência de vértices e arestas $v_0 x_1 v_1 x_2 v_2 \ldots v_{n-1} x_n v_n$ tal que
    - $v_0 = a$ e $v_n = b$
    - $x_i = (v_{i-1}, v_i)$

Grafos

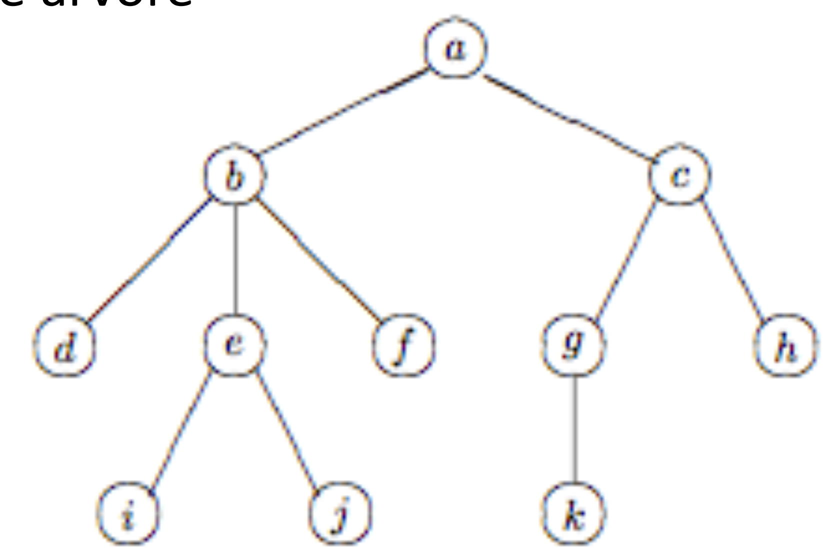
- Alguns caminhos importantes
  - **Caminho nulo:** caminho de comprimento zero
  - **Caminho fechado:** aquele em que $v_0 = v_n$
  - **Ciclo:** caminho fechado sem vértices e arestas repetidos, exceto v_0 e v_n
  - **Laço:** ciclo de comprimento um
  - **Caminho simples:** caminho sem vértices repetidos

- Alguns grafos importantes
  - **Grafo acíclico:** grafo sem ciclos
  - **Grafo conexo:** aquele em que existe caminho de qualquer vértice a qualquer outro

Grafos

- Uma **árvore** é um grafo acíclico conexo

- Uma árvore com raiz é uma tripla $T = (V, A, r)$ tal que
  a) $(\{v\}, \emptyset, v)$ é árvore
  b) se (V, A, r) é uma árvore, $v \in V$ e $v' \notin V$, então $(V \cup \{v'\}, A \cup \{(v, v')\}, r)$ é árvore
  c) nada mais é árvore



Grafos

- Terminologia associada a árvores
  - Filhos, pais, irmãos, descendentes, ancestrais
  - Vértice interno, folha
  - Nível de um vértice, altura da árvore
  - Árvore dirigida, árvore ordenada

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

LINGUAGENS FORMAIS

Linguagens Formais

- Uma linguagem formal, ao contrário de uma linguagem natural, é tal que:
  a) Tem uma sintaxe bem definida, de tal forma que, dada uma sentença, é sempre possível saber se ela pertence ou não à linguagem
  b) Tem uma semântica precisa, de forma que não contém sentenças sem significado ou ambíguas

São úteis na matemática, e áreas que utilizam matemática como ferramenta, como física, química, engenharias e computação

- Exemplos
  - Linguagens como Java, C, Pascal, HTML, ...

Linguagens Formais

- Toda linguagem possui um **alfabeto** (Σ) associado
  - Um alfabeto é um conjunto finito não vazio de elementos (**símbolos**)

- Uma **palavra** sobre um alfabeto é uma sequência finita de símbolos
  - Existe uma **palavra vazia**, constituída de zero símbolos, representada por λ

- Uma palavra tem um tamanho representado pelo número de símbolos que a compõem
  - Uma palavra x tem tamanho $|x|$ e $|\lambda| = 0$

Linguagens Formais

- Dois exemplos de alfabetos particularmente importantes
  - $\Gamma = \{ 0, 1 \}$
    - **Palavras:** $0, 1, 10, 11, 100, \ldots$
    - **Aplicação:** representar qualquer número natural (n), usando codificação em base 2
    - **Tamanho de *n*:** $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$
  - $\Sigma = \{ 1 \}$
    - **Palavras:** $\lambda, 1, 11, 111, 1111, \ldots$
    - **Aplicação:** também representa qualquer número natural (n), representada por $| n |$
    - **Tamanho de *n*:** $| n |$

Linguagens Formais

- a^n designa n a's em sequência
  - Exemplos
    - $1^0 = \lambda$
    - $0^4 = 0000$
    - $1^3 0 1^2 = 111011$

- Σ^* é o conjunto de todas as palavras sobre Σ
  - Exemplos
    - $\{1\}^* = \{\lambda,\ 1,\ 11,\ 111,\ \ldots\}$
    - $\{0,1\}^* = \{\lambda,\ 0,\ 1,\ 00,\ 01,\ 10,\ 11,\ \ldots\}$

Linguagens Formais

- Operações sobre conjuntos se aplicam às linguagens

  – Sejam as linguagens L_1 sobre Σ_1 e L_2 sobre Σ_2
    - $L_1 \cup L_2$ é uma linguagem sobre $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$
    - $L_1 \cap L_2$ é uma linguagem sobre $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$
    - $L_1 - L_2$ é uma linguagem sobre Σ_1
    - $\overline{L_1} = \Sigma_1^* - L_1$ é uma linguagem sobre Σ_1
    - $\mathrm{P}(L_1)$ é um conjunto de linguagens sobre Σ_1
    - $\mathrm{P}(\Sigma_1^*)$ é o conjunto de todas as linguagens sobre Σ_1

Linguagens Formais

- **Concatenação:** A concatenação de duas palavras $x = a_1a_2...a_m$ e $y = b_1b_2...b_n$ é $xy = a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n$
  - Se $x = 001$ e $y = 10$, então $xy = 00110$
  - $\lambda w = w\lambda = w$ para qualquer palavra w
  - $x(yz) = (xy)z = xyz$ para quaisquer x, y, z

- **Reverso:** O reverso de uma palavra $w = a_1a_2...a_n$ é $w^R = a_na_{n-1}...a_1$
  - $\lambda^R = \lambda$, $a^R = a$, $(\mathrm{abcaabb})^{\mathrm{R}} = \mathrm{bbaacba}$
  - Se $w^R = w$, então w é um palíndromo

Linguagens Formais

- **Prefixo:** A palavra x é um prefixo de w se $w = xy$
  - Prefixos de abc: λ, a, ab e abc

- **Sufixo:** A palavra y é um sufixo de w se $w = xy$
  - Sufixos de abc: λ, c, bc e abc

- **Subpalavra:** A palavra z é uma subpalavra de w se $w = xzy$
  - Subpalavras de abc: λ, a, b, c, ab, bc e abc

Linguagens Formais

- Duas linguagens L_1 e L_2 podem ser **concatenadas** para formar uma nova linguagem $L_1L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \text{ e } y \in L_2\}$
  - Considere as linguagens $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| = 5\}$ e $L_2 = \{0y \mid y \in \{0,1\}^*\}$
    - $\varnothing L_1 =$
    - $\{\lambda\} L_1 =$
    - $L_1L_1 =$
    - $L_1L_2 =$
    - $L_2L_1 =$
    - $L_2L_2 =$
- L^n designa $LL \ldots L$ (n vezes)

$$\begin{cases} L^0 = \\ L^n = \end{cases}$$

Linguagens Formais

- Duas linguagens L_1 e L_2 podem ser **concatenadas** para formar uma nova linguagem $L_1L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \text{ e } y \in L_2\}$
  - Considere as linguagens $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| = 5\}$ e $L_2 = \{0y \mid y \in \{0,1\}^*\}$
    - $\emptyset L_1 = \emptyset$
    - $\{\lambda\}L_1 = L_1$
    - $L_1L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| = 10\}$
    - $L_1L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \geq 6$ e o sexto símbolo é $0\}$
    - $L_2L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \geq 6$ e w começa com $0\}$
    - $L_2L_2 = \{0y \mid y \in \{0,1\}^*$ e y contém no mínimo um $0\}$
- L^n designa $LL\ldots L$ (n vezes)

$$\begin{cases} L^0 = \{\lambda\} \\ L^n = L^{n-1}L \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$$

Linguagens Formais

- **Fecho de Kleene** de L (L^*) pode ser definido recursivamente
  a) $\lambda \in L^*$
  b) se $x \in L^*$ e $y \in L$ então $xy \in L^*$

$$L^* = \bigcup_{n \in N} L^n = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \cdots = \{\lambda\} \cup L \cup LL \cup \cdots$$

- **Fecho positivo de Kleene** de L é $L^+ = LL^*$
  – $L^* = L^+ \cup \{\lambda\}$

$$L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n = L^1 \cup L^2 \cup \cdots = L \cup LL \cup \cdots$$

Linguagens Formais

- Exemplos de **Fechos de Kleene**
  - $\varnothing^* =$ e $\varnothing^+ =$
  - $\{\lambda\}^* =$ e $\{0\}^* =$
  - $\{00\}^* =$
    $\{00\}^+ =$
  - $\{01,1\}^* =$
  - $\{\lambda,00,11\}^* =$

Linguagens Formais

- Exemplos de **Fechos de Kleene**
  - $\varnothing^* = \{\lambda\}$ e $\varnothing^+ = \varnothing$
  - $\{\lambda\}^* = \{\lambda\}^+ = \{\lambda\}$ e $\{0\}^* = \{0^n \mid n \in N\}$
  - $\{00\}^* = \{w \in \{0\}^* \mid |w|$ é par $\}$ e
    $\{00\}^+ = \{w \in \{0\}^* \mid |w|$ é par e $n \geq 2\}$
  - $\{01,1\}^* = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ todo 0 em w é seguido de $1\}$
  - $\{\lambda,00,11\}^* = \{\lambda,00,11\}^+ = \{\lambda\} \cup \{00,11\}^+$

Linguagens Formais

- Exemplos de linguagens sobre o alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$
  - O conjunto das palavras que começam com 0?
    $\{0\}\{0,1\}^*$
  - O conjunto das palavras que contém 00 ou 11?
    $\{0,1\}^*\{00,11\}\{0,1\}^*$
  - O conjunto das palavras que terminam com 0 seguido de um número ímpar de 1s consecutivos?
    $\{0,1\}^*\{01\}\{11\}^*$
  - Conjunto das palavras de tamanho par que começam com 0 ou terminam com 0?
    $(\{0,1\}\{0,1\})^* \cap [\{0\}\{0,1\}^* \cup \{0,1\}^*\{0\}]$

Linguagens Formais

- Alguns exemplos mais complicados
  - O conjunto das palavras com um prefixo de um ou mais 0s seguido (imediatamente) de um sufixo de 1s de mesmo tamanho:
    $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$
  - O conjunto das palavras formadas pela concatenação de palavras da forma $0^n 1^n$ para $n \geq 1$:
    $$\bigcup_{k \geq 1} \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}^k$$
  - O conjunto das palavras de tamanho par com as duas metades idênticas:
    $\{xx \mid x \in \{0,1\}^*\}$

Linguagens Formais

- Como uma linguagem sobre um alfabeto Σ é sempre um conjunto contável, já que é um subconjunto de Σ^* que é enumerável, pode-se fazer uma definição recursiva:
  a) $\lambda \in L$
  b) se $x \in L$ então $0x1 \in L$

Gramática: formalismo, que permite o uso de recursão, especialmente projetado para a definição de linguagens

CEFET-MG CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

GRAMÁTICAS

Linguagens Formais e Autômatos

Gramáticas

- O elemento fundamental das gramáticas é a **regra**

- Uma **regra** é um par ordenado (u, v), tradicionalmente escrito como $u \to v$, onde u e v são palavras que podem conter símbolos de dois alfabetos disjuntos
  - Alfabeto de variáveis (não terminais): símbolos auxiliares
    - Ex.: $\Gamma = \{A, B\}$
  - Alfabeto de terminais: linguagem definida
    - Ex.: $\Sigma = \{0, 1\}$

- Exemplo de **regra**
  - $0AB \to 10A$

Gramáticas

- A aplicação das regras é chamada de **derivação**, onde a relação de derivação é denotada por $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
0ABB0AB &\Rightarrow 10AB0AB && \text{(Aplicando a regra } 0AB \rightarrow 10A\text{)} \\
&\Rightarrow 110A0AB && \text{(Aplicando a regra } 0AB \rightarrow 10A\text{)} \\
&\Rightarrow 110A10A && \text{(Aplicando a regra } 0AB \rightarrow 10A\text{)}
\end{aligned}
$$

Gramáticas

- Uma gramática é constituída de uma **variável de partida** e um **conjunto de regras**
  - Toda derivação deve iniciar pela variável de partida

- Nomenclatura
  - **Forma sentencial:** palavra constituída de terminais e/ou variáveis
  - **Sentença:** Forma sentencial constituída apenas de terminais
  - **Linguagem gerada:** sentenças que podem ser derivadas

Notação: $L(G)$ é a linguagem gerada pela gramática G

Gramáticas

- Dois exemplos de gramáticas simples
  - A gramática de variável P para gerar a linguagem $\{0\}^*$

$$P \rightarrow 0P$$
$$P \rightarrow \lambda$$

  - A gramática de variável P para gerar a linguagem $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

$$P \rightarrow 0P1$$
$$P \rightarrow \lambda$$

Gramáticas

- Mais um exemplo: uma gramática mais complexa
  - Seja a gramática G constituída pela variável de partida P e pelas regras

$$P \rightarrow aAbc$$

$$A \rightarrow aAbC$$

$$A \rightarrow \lambda$$

$$Cb \rightarrow bC$$

$$Cc \rightarrow cc$$

Qual a $L(G)$?

Gramáticas

- Mais um exemplo: uma gramática mais complexa
  - Uma derivação

$$\begin{aligned} P &\Rightarrow aAbc \quad \text{(regra 1)} \\ &\Rightarrow abc \quad \text{(regra 3)} \end{aligned}$$

$abc \in L(G)$

  - Outra derivação

$$\begin{aligned} P &\Rightarrow aAbc && \text{(regra 1)} \\ &\Rightarrow aaAbCbc && \text{(regra 2)} \\ &\Rightarrow aaaAbCbCbc && \text{(regra 2)} \\ &\Rightarrow aaabCbCbc && \text{(regra 3)} \\ &\Rightarrow aaabbCCbc && \text{(regra 4)} \\ &\Rightarrow aaabbCbCc && \text{(regra 4)} \\ &\Rightarrow aaabbbCCc && \text{(regra 4)} \\ &\Rightarrow aaabbbCcc && \text{(regra 5)} \\ &\Rightarrow aaabbbccc && \text{(regra 5)} \end{aligned}$$

$a^3b^3c^3 \in L(G)$

Gramáticas

- Uma gramática é uma quádrupla (V, Σ, R, P), em que
  - V é um conjunto finito de elementos denominados **variáveis**
  - Σ é um **alfabeto** $(V \cap \Sigma = \emptyset)$
  - $R \subseteq (V \cup \Sigma)^{+} \times (V \cup \Sigma)^{*}$ é um conjunto finito de pares ordenados chamados **regras**
  - $P \in V$ é uma variável conhecida como **variável de partida**

Gramáticas

- Uma derivação pode ser aplicada n vezes ($\overset{n}{\Rightarrow}$)
  - A relação $\overset{n}{\Rightarrow}$ pode ser definida recursivamente para uma gramática G
    a) $x \overset{0}{\Rightarrow} x$ para toda forma sentencial x de G
    b) se $w \overset{n}{\Rightarrow} xuy$ e $u \rightarrow v$ é regra de G, então $w \overset{n+1}{\Rightarrow} xvy$

- Pode ser aplicada também em vários passos
  - $x \overset{*}{\Rightarrow} y$, se existe $n \geq 0$ tal que $x \overset{n}{\Rightarrow} y$
  - $x \overset{+}{\Rightarrow} y$, se existe $n \geq 1$ tal que $x \overset{n}{\Rightarrow} y$

Gramáticas

- Assim, uma gramática pode ser definida como

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid P \overset{*}{\Rightarrow} w\}$$

- Exemplo de um esquema de derivação

$$
\begin{array}{lll}
P & \Rightarrow aAbc & \text{(regra 1)} \\
 & \overset{k}{\Rightarrow} aa^k A(bC)^k bc & \text{(regra 2, } k \text{ vezes)} \\
 & \Rightarrow aa^k (bC)^k bc & \text{(regra 3)} \\
 & \Rightarrow a^{k+1}(bC)^{k-1} b^2 Cc & \text{(regra 4)} \\
 & \overset{2}{\Rightarrow} a^{k+1}(bC)^{k-2} b^3 C^2 c & \text{(regra 4, 2 vezes)} \\
 & \vdots & \\
 & \overset{k}{\Rightarrow} a^{k+1} b^{k+1} C^k c & \text{(regra 4, } k \text{ vezes)} \\
 & \Rightarrow a^{k+1} b^{k+1} c^{k+1} & \text{(regra 5, } k \text{ vezes)}
\end{array}
$$

$$\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \subseteq L(G)$$

Gramáticas

- Uma mesma linguagem pode ser gerada por inúmeras gramáticas

- Duas gramáticas G e G' são ditas equivalentes quando

$$L(G) = L(G')$$

Gramáticas

- As regras de uma gramática podem ser escritas com uma notação simplificada

- Duas regras com o mesmo lado esquerdo $u \rightarrow v$ e $u \rightarrow v'$ podem ser reescritas como

$$u \rightarrow v \mid v'$$

  – No exemplo anterior, as regras 2 e 3 poderiam ser expressas como

$$A \rightarrow aAbC \mid \lambda$$

Gramáticas

- Considere a gramática $G = (V, \Sigma, R, E)$, onde
  - $V = \{E, T, N, D\}$
  - $\Sigma = \{+, -, (,), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
  - R contém as seguintes regras

$$E \rightarrow E + T \mid E - T \mid T$$

$$T \rightarrow (E) \mid N$$

$$N \rightarrow DN \mid D$$

$$D \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$$

Qual linguagem essa gramática gera?

Gramáticas

- Geração de uma sequência de somas/subtrações de Ts

$$
\begin{aligned}
E &\Rightarrow E+T && \text{(regra } E \rightarrow E+T\text{)}\\
&\Rightarrow E-T+T && \text{(regra } E \rightarrow E-T\text{)}\\
&\Rightarrow E-T-T+T && \text{(regra } E \rightarrow E-T\text{)}\\
&\Rightarrow T-T-T+T && \text{(regra } E \rightarrow T\text{)}
\end{aligned}
$$

Recursão à esquerda

- Geração de sequência de 4 dígitos

$$
\begin{aligned}
N &\Rightarrow DN && \text{(regra } N \rightarrow DN\text{)}\\
&\Rightarrow DDN && \text{(regra } N \rightarrow DN\text{)}\\
&\Rightarrow DDDN && \text{(regra } N \rightarrow DN\text{)}\\
&\Rightarrow DDDD && \text{(regra } N \rightarrow D\text{)}
\end{aligned}
$$

Recursão à direita

Gramáticas

- Derivação recursiva

$$
\begin{aligned}
E &\Rightarrow E+T && \text{(regra } E \rightarrow E+T\text{)}\\
&\Rightarrow T+T && \text{(regra } E \rightarrow T\text{)}\\
&\Rightarrow (E)+T && \text{(regra } T \rightarrow (E)\text{)}
\end{aligned}
$$

A variável E aparece (recursivamente) na forma sentencial entre parênteses

Problemas De Decisão

Problema de Decisão

- Um problema de decisão (PD) é uma questão que faz referência a um conjunto finito de parâmetros e que, para valores específicos dos parâmetros, tem como resposta **sim** ou **não**

- Exemplos de problemas de decisão
  - Determinar se o número 123654789017 é primo
  - Determinar se um número natural n é primo
  - Determinar se existe um ciclo em um grafo G
  - Determinar se uma palavra w é gerada por uma gramática G

Quantos parâmetros tem cada problema?

Problema de Decisão

- Um problema de decisão tem um conjunto de questões, uma para cada combinação possível dos valores que os parâmetros podem assumir

- Uma instância de um problema de decisão é dar valores específicos (instanciar) aos parâmetros de uma questão

- Exemplos
  - "Determinar se um número natural n é primo" tem infinitas questões
    - Determinar se 0 é primo, se 1 é primo, ...
  - "Determinar se o número 123654789017 é primo" é constituído de uma única instância

Problema de Decisão

- **Solução:** Uma solução para um problema de decisão, **procedimento de decisão**, é um algoritmo que, para qualquer instância de PD, retorna a resposta correta

- **Problema decidível/indecidível:** Um problema de decisão que tem solução é dito ser decidível e um que não tem solução é dito ser indecidível
  - Todo PD com conjunto finito de instâncias é decidível

- **Restrições:** Um problema de decisão pode ser obtido de outro restringindo o conjunto de valores possíveis de um ou mais parâmetros
  - "Determinar se o número 123654789017 é primo" é uma restrição de "Determinar se um número natural n é primo"

ISSO É TUDO, PESSOAL!